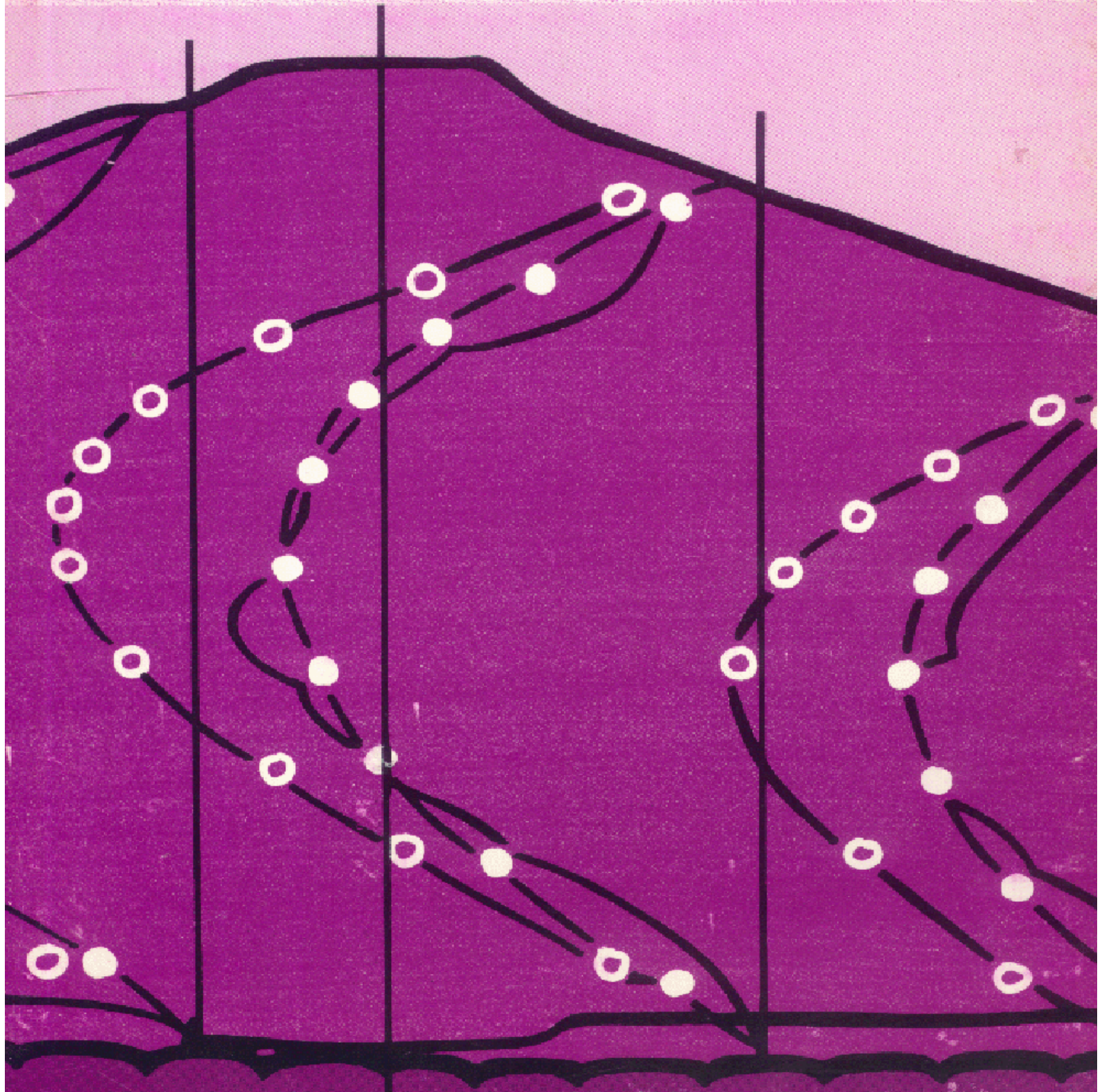


# STATIC ANALYSIS OF EMBANKMENT DAMS

## CALCUL STATIQUE DES BARRAGES EN REMBLAI



BULLETIN 53  
1986



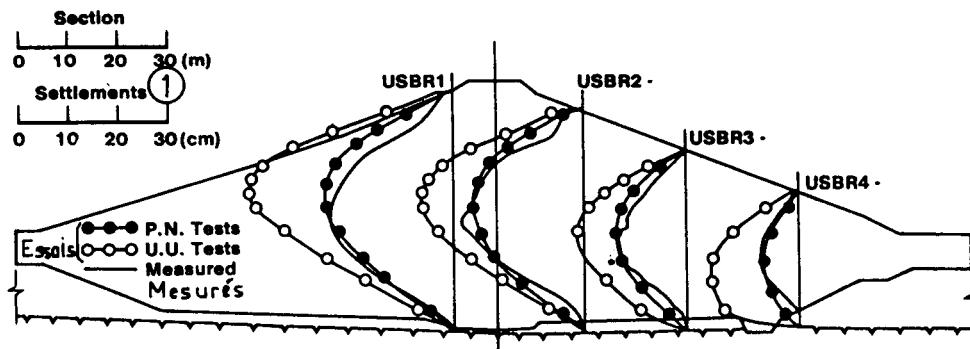


Fig. 6.13

Barrage de Ilha Solteira - Tassements calculés et mesurés.  
*Ilha Solteira Dam - Calculated and measured settlements.*

La couverture est une vue partielle de cette Fig.

*Cover is a partial view of this Fig.*

Rapport préparé par  
 Z. Eisenstein, Professeur de Génie Civil à Edmonton, Canada, et  
 D. J. Naylor, Maître de Conférence, Université de Swansea, Grande-Bretagne  
 pour le Comité des Calculs et de la Conception des Barrages.

*Report prepared by  
 Z. Eisenstein, Professor of Civil Engineering, Edmonton, Canada, and  
 D. J. Naylor, Senior Lecturer, University College of Swansea, U.K.  
 for the Committee on Analysis and Design of Dams.*

**STATIC ANALYSIS  
OF EMBANKMENT DAMS**

**CALCUL STATIQUE  
DES BARRAGES EN REMBLAI**



**BULLETIN 53  
1986**

---

Commission Internationale des Grands Barrages  
151, bd Haussmann, 75008 Paris - Tél. : 47 64 67 33 - Télex : 641320 F (ICOLD)

---

**AVERTISSEMENT – EXONERATION DE RESPONSABILITE:**

Les informations, analyses et conclusions auxquelles cet ouvrage renvoie sont sous la seule responsabilité de leur(s) auteur(s) respectif(s) cité(s).

Les informations, analyses et conclusions contenues dans cet ouvrage n'ont pas force de Loi et ne doivent pas être considérées comme un substitut aux réglementations officielles imposées par la Loi. Elles sont uniquement destinées à un public de Professionnels Avertis, seuls aptes à en apprécier et à en déterminer la valeur et la portée et à en appliquer avec précision les recommandations à chaque cas particulier.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de cet ouvrage, compte tenu de l'évolution des techniques et de la science, nous ne pouvons en garantir l'exhaustivité.

Nous déclinons expressément toute responsabilité quant à l'interprétation et l'application éventuelles (y compris les dommages éventuels en résultant ou liés) du contenu de cet ouvrage.

En poursuivant la lecture de cet ouvrage, vous acceptez de façon expresse cette condition.

**NOTICE – DISCLAIMER :**

The information, analyses and conclusions referred to herein are the sole responsibility of the author(s) thereof.

The information, analyses and conclusions in this document have no legal force and must not be considered as substituting for legally-enforceable official regulations. They are intended for the use of experienced professionals who are alone equipped to judge their pertinence and applicability and to apply accurately the recommendations to any particular case.

This document has been drafted with the greatest care but, in view of the pace of change in science and technology, we cannot guarantee that it covers all aspects of the topics discussed.

We decline all responsibility whatsoever for how the information herein is interpreted and used and will accept no liability for any loss or damage arising therefrom.

Do not read on unless you accept this disclaimer without reservation.

---

## TABLE DES MATIÈRES

---



---

## TABLE OF CONTENTS

---

<p>1. INTRODUCTION <b>4/5</b></p> <p>1.1. Avant-propos <b>4/5</b></p> <p>1.2. Objectifs de calcul <b>6/7</b></p> <p>1.3. Types de rupture <b>6/7</b></p> <p>1.4. Méthodes de calcul <b>8/9</b></p> <p>2. CALCUL DE LA STABILITÉ DES TALUS <b>16/17</b></p> <p>2.1. Introduction <b>16/17</b></p> <p>2.2. Méthodes d'équilibre limite <b>16/17</b></p> <p>2.3. Calcul de la stabilité par la méthode des éléments finis <b>24/25</b></p> <p>3. MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS - DISCRÉTISATION DE LA GÉOMÉTRIE <b>30/31</b></p> <p>3.1. Introduction <b>30/31</b></p> <p>3.2. Modèle bidimensionnel et modèle tridimensionnel <b>32/33</b></p> <p>4. CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS - CONSTRUCTION ET EXPLOITATION DU BARRAGE <b>36/37</b></p> <p>4.1. Introduction <b>36/37</b></p> <p>4.2. Calcul en contrainte effective ou en contrainte totale <b>36/37</b></p> <p>4.3. Construction <b>40/41</b></p> <p>4.4. Mise en eau <b>44/45</b></p> <p>4.5. Régime permanent <b>48/49</b></p> <p>4.6. Vidange rapide <b>50/51</b></p> <p>4.7. Étapes du calcul <b>52/53</b></p> <p>5. ANALYSE DE LA CONSOLIDATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS <b>58/59</b></p> <p>5.1. Introduction <b>58/59</b></p> <p>5.2. Calcul de pression interstitielle par la méthode des éléments finis <b>60/61</b></p> <p>5.3. La méthode des deux étapes <b>62/63</b></p> <p>6. MODÉLISATION DES MATÉRIAUX ET ÉTUDES DE CAS <b>66/67</b></p> <p>6.1. Introduction <b>66/67</b></p> <p>6.2. Mesures de contraintes et de déformations <b>68/69</b></p>	<p>1. INTRODUCTION</p> <p>1.1. Background</p> <p>1.2. Objectives of analysis</p> <p>1.3. Types of failure</p> <p>1.4. Methods of analysis</p> <p>2. ANALYSIS OF SLOPE STABILITY</p> <p>2.1. Introduction</p> <p>2.2. Limit equilibrium analyses</p> <p>2.3. The finite element method for stability analysis</p> <p>3. FINITE ELEMENT MODELLING - IDEALISATION OF GEOMETRY</p> <p>3.1. Introduction</p> <p>3.2. 2D v. 3D</p> <p>4. FINITE ELEMENT MODELLING - CONSTRUCTION AND OPERATION</p> <p>4.1. Introduction</p> <p>4.2. Effective or total stress analysis</p> <p>4.3. Construction</p> <p>4.4. Reservoir filling</p> <p>4.5. Steady seepage</p> <p>4.6. Rapid drawdown</p> <p>4.7. Steps in an analysis</p> <p>5. FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONSOLIDATION</p> <p>5.1. Introduction</p> <p>5.2. Finite element pore pressure analysis</p> <p>5.3. The two stage method</p> <p>6. MATERIAL IDEALISATION AND CASE STUDIES</p> <p>6.1. Introduction</p> <p>6.2. Stress and strain measures</p>
--	--

---

6.3. Types de modèles rhéologiques	70/71	6.3. Types of model
6.4. Paramètres des matériaux	82/83	6.4. Material parameters
6.5. Études de cas	88/89	6.5. Case studies
6.6. Conclusions	94/95	6.6. Conclusions
7. CONCLUSIONS	98/99	7. CONCLUSIONS
ANNEXE	100/101	APPENDIX
FIGURES	103	FIGURES

---

# 1. INTRODUCTION

---

## 1.1. AVANT-PROPOS

Ce rapport a été préparé à la demande du « Comité du calcul et de la conception des barrages » de la CIGB. Il présente en détail le calcul statique des barrages en remblai, en approfondissant le rapport plus général publié en 1976 par Clough et Zienkiewicz.

Ces deux rapports s'appuient sur les travaux publiés dans les comptes rendus de la Conférence Internationale sur les « Critères et Hypothèses pour les Modèles Numériques de Barrages » tenue à Swansea en 1975. Cette conférence a été organisée en coopération avec la CIGB et un de ses buts était justement de fournir la matière de base de ces rapports.

Ce rapport est destiné aux ingénieurs chargés de la conception ou de l'entretien des barrages en remblai. L'intention des auteurs a été de montrer les différentes techniques de calcul disponibles et d'exposer comment ces méthodes ont été et pourraient être utilisées à la fois dans la conception et la surveillance des barrages. La richesse des méthodes numériques actuelles et, en particulier, de la méthode des éléments finis est telle que leur utilisation peut sembler une tâche redoutable à l'ingénieur. Il peut craindre que son jugement ne soit plus affaibli que renforcé par la quantité de calculs possibles. Dans cet esprit, les auteurs ont préféré exclure de ce rapport toute formule mathématique et insister sur les applications pratiques. Ce rapport traite seulement des problèmes de calcul des barrages en remblai. Ceci comprend les barrages en terre et en enrochement avec noyau interne, à l'exclusion des problèmes de calcul de fondation, sauf dans le cas où les propriétés de résistance et de déformation de la fondation peuvent être prises en compte dans le calcul du remblai (comme cela peut être généralement fait dans l'analyse par éléments finis, par exemple). Les barrages à masque amont ne sont pas traités séparément. Cependant, beaucoup de points du rapport seront applicables aussi à ce type de barrage.

La puissance de l'analyse numérique est telle que l'on peut pardonner au calculateur de penser que sa discipline domine toute la conception des barrages. En fait, le calcul n'est, bien sûr, qu'une partie d'un processus global, dans lequel il ne peut pas remplacer les études géologiques, les reconnaissances sur le site, les considérations logistiques, ni les problèmes écologiques, etc...

En raison de l'utilisation de graphiques provenant de sources diverses, il manque une certaine cohésion dans les unités, spécialement en ce qui concerne les contraintes. Les valeurs équivalentes du Système International (SI) sont données dans le texte. Pour faciliter la lecture des graphiques concernés, les facteurs de conversion sont indiqués en annexe.

---

# 1. INTRODUCTION

---

## 1.1. BACKGROUND

This report has been prepared at the request of the Committee on the Analysis and Design of Dams of ICOLD. It extends the coverage of an earlier and more general report by Clough and Zienkiewicz (1976) to deal with static analysis of fill dams in greater depth.

Background to both this and the Clough-Zienkiewicz report is provided in the Proceedings of the International Symposium on « Criteria and Assumptions for the Numerical Analysis of Dams » (Eds. Naylor, Stagg and Zienkiewicz) held in Swansea in 1975. This Symposium was organized with ICOLD cooperation and one of its purposes was to provide material for these reports.

The report is written for those involved in the design and maintenance of embankment dams. The intention is to outline the analytical techniques available and to indicate how they have been used and might be used both in design analysis and in monitoring subsequent performance. The analytical sophistication now available, particularly from the finite element method, makes this a formidable task for the practitioner. The danger is that his judgement may be impaired rather than improved by the sheer quantity of analysis which he can carry out. To further this purpose, the writers have omitted mathematical formulations from this report and have concentrated instead on applications. The authors have dealt with problems of the analysis of embankment dams only. This includes both earth and rockfill dams with internal cores but excludes the problems of foundation analysis except in so far as the strength and deformation properties of the foundation can be included in an analysis of the embankment (as it usually can be in, for example, a finite element analysis). No separate treatment of upstream membrane dams is provided. Much of the material in the report will, however, also be relevant to this type of dam.

There is so much to numerical analysis that an analyst might be forgiven for thinking that it dominates the design of dams. It is, of course, only part of the overall process and can provide no substitute for site investigation and geological studies, considerations of logistics, ecology, etc.

Due to the use of diagrams from various sources there is a lack of standardisation of units, particularly of stress. SI (Standard International) equivalents are given in the text. To facilitate reading of the figures affected, conversions are given in an Appendix.



## 1.2. OBJECTIFS DE CALCUL

Le but du calcul statique est de répondre à deux questions:

- (1) La structure est-elle sûre et doit-on en craindre la rupture partielle ou totale?
- (2) Les déformations de la structure vont-elles rester dans des limites compatibles avec l'usage attendu de cette structure?

Ceci s'applique pratiquement à toutes les structures de génie civil, mais c'est sans doute dans le domaine des barrages que le rôle du calcul est le plus important. En effet, ce sont les plus grandes constructions humaines; chaque barrage est en général unique par sa conception; et la rupture d'un barrage entraîne des conséquences certainement plus graves que celles de la rupture de n'importe quelle autre structure.

## 1.3. TYPES DE RUPTURE

Dans leur construction et leur fonctionnement, les barrages subissent des conditions de chargement très variées et on a observé des ruptures totales de barrages à tous les stades. Pour évaluer l'importance relative des causes d'accident, on a effectué une statistique des ruptures présentée dans le Tableau 1.1. et basée sur deux sources indépendantes (Middlebrooks, 1953; Babb et Mermel, 1968).

Alors que le recensement du Middlebrooks s'intéresse surtout aux barrages des Etats-Unis et du Canada, celui de Babb et Mermel concerne le monde entier. Ces deux études présentent des similitudes notables, particulièrement sur l'importance relative des différentes causes de rupture et sur leurs fréquences. La cause la plus fréquente (la submersion) ne sera pas traitée ici. En effet, sauf dans le cas où on envisage dans la conception du barrage des dispositifs spéciaux et coûteux (comme la protection des parements), la sécurité contre la submersion ne concerne pas le calcul du remblai proprement dit.

Les mécaniciens des sols ont mis au point des méthodes de calcul qui permettent d'évaluer la sécurité d'un barrage dans les cas suivants: pendant ou immédiatement après la construction; en service normal (régime permanent); en vidange rapide; pendant la première mise en eau. Ces méthodes sont devenues très perfectionnées et ont été vérifiées sur de nombreux projets dans le monde entier. Elles conduisent toutes à quantifier la *sécurité* de l'ouvrage par un seul nombre: le *coefficient de sécurité*. C'est le nombre par lequel il faudrait réduire la résistance mécanique pour causer la rupture. Bien qu'en théorie les méthodes d'équilibre limite ne traitent absolument pas des déformations, en pratique, elles gouvernent les déformations par le coefficient de sécurité. Elles sont incapables de donner une image du champ des déformations sous divers cas de charge.

Le renard est la cause d'environ 30% des ruptures et, si l'on exclut la submersion, c'est la cause principale. Le renard, percolation localisée, avec érosion régressive, suit en général un chemin prédéterminé:

- (a) soit en zone de faiblesse dans un remblai, comme un contact entre le remblai et un appui rocheux ou une structure en béton, etc. . . .
- (b) soit une fissure, résultant de contraintes de traction dues à l'adaptation du remblai à des variations de chargement.

La possibilité de renard selon (a) ne peut pas être déterminée par le calcul. On ne peut la diminuer que par une conception appropriée du barrage et une bonne surveillance des travaux. Par contre, les causes de renard citées en (b) sont accessibles par le calcul des champs de contraintes et de déformations dans le

## 1.2. OBJECTIVES OF ANALYSIS

The purpose of a static analysis is to answer two questions:

- (1) How safe is the structure against a total or partial failure?
- (2) Will the deformations of the structure remain within limits tolerable for the operation and function of the structure?

While this role applies to practically all civil engineering structures, the importance of analysis is perhaps highest with dams. They are the largest man-made structures, their design is almost always of a unique nature and the consequence of failure is certainly greater than those resulting from the collapse of other types of structures.

## 1.3. TYPES OF FAILURE

Earth and rockfill dams must sustain very different loading conditions that arise during construction and subsequent operations. Total failures of dams have been reported during each of these stages. To appreciate the relative importance of causes which can lead to damage a statistical picture of failures has been compiled on the basis of two independent sources (Middlebrooks, 1953; Babb and Mermel, 1968) and is given in Table 1.1.

While Middlebrooks' survey is based mainly on dams in the USA and Canada, the Babb and Mermel survey included major failures from the whole world. There is a noticeable similarity in both surveys regarding the relative importance of various causes of failure as well as their frequency. The most frequent cause — overtopping — will not be discussed here. Unless rather special and expensive measures are incorporated into the design (such as slope protection), the safety against overtopping is outside the traditional scope and responsibility of embankment analysis.

Soil mechanics has, however, developed analytical methods to evaluate adequately safety against failure for the conditions during and immediately after construction, steady seepage, rapid drawdown and first filling of the reservoir. These methods, brought to a considerable degree of perfection nowadays and verified on many projects around the world, all seek to express *safety* quantitatively by a single number — *factor of safety*. This is the factor by which the strength must be reduced to cause failure. Although theoretically limit equilibrium methods are entirely unconcerned with deformations, in practice they control deformations through the factor of safety. They are unable to provide a picture of the magnitude and distribution of deformations associated with the various loading conditions.

Piping, as a source of failures, accounts for about 30% of the cases. After excluding overtopping, it is the largest single contributor. Piping, a concentrated leakage with a progressive character, usually develops along a predetermined path. The predetermined path could be:

- (a) either a zone of structural weakness within an embankment, such as a contact between an earth fill and rock abutment, concrete pipe, etc..
- (b) or a crack, resulting from tensile effective stress caused by stress conditions imposed by the compliance of the embankment under changing load.

The susceptibility to piping under (a) cannot be determined by numerical analysis. It can be minimised only through proper selection and positioning of materials and control of construction. However, the factors under (b) are amenable to a stress and deformation analysis of the embankment and its foundation. The

remblai et sa fondation. Des études récentes sur la fracturation hydraulique (Kjaernsli et Torblaa, 1968; Sherard, 1973; Kulhawy et Gurtowski, 1976) ont montré le rôle capital des champs de contraintes et de déformations dans les barrages en terre.

Alors que le développement des fissures suivi de renards peut entraîner et, comme les statistiques le montrent, a effectivement entraîné la rupture, la compréhension de l'état de contraintes et de déformations dans un remblai est intéressante même si on ne craint pas une rupture immédiate. En effet, on a l'habitude d'instrumenter et d'ausculter les grands barrages. Pour juger des résultats de cette auscultation et, en particulier, pour vérifier que le comportement réel d'un barrage est normal, il faut avoir, au préalable, défini le comportement attendu. Comme la plupart des barrages sont uniques par leur conception, il est impossible d'extrapoler à partir du comportement d'un autre barrage existant. Il est donc nécessaire de déterminer les contraintes et les déformations du barrage concerné par un modèle numérique adapté.

Tableau 1.1. - Statistique des causes de rupture de barrages en terre

Cause de rupture	D'après Middlebrooks (1953)		D'après Babb et Mermel (1968)	
	Nombre de cas enregistrés	%	Nombre de cas enregistrés	%
Submersion	68	36.1	60	34.8
Renard	63	33.5	45	26.0
Service normal	25	13.3	29	16.8
Construction et fin de construction	23	12.2	25	14.4
Vidange rapide	5	2.7	9	5.2
Mise en eau	4	2.2	5	2.8
TOTAL	188	100.0	173	100.0

#### 1.4. MÉTHODES DE CALCUL

Ce n'est pas dans un rapport de la nature de celui-ci que l'on peut décrire les formulations mathématiques des différentes méthodes utilisées pour le calcul des barrages en remblai. Il suffit d'indiquer les méthodes utilisées, de préciser leur importance relative, et de montrer leurs applications, comme on le fera dans les chapitres suivants.

Les principales méthodes sont la méthode de l'équilibre limite et la méthode des éléments finis. La Fig. 1.1. montre le schéma général des calculs statiques. L'analyse en contraintes et déformations est un problème aux limites complexe de mécanique des milieux continus. Ce problème était pratiquement insoluble avant le développement de la méthode des éléments finis. La méthode de l'équilibre limite est restrictive dans la mesure où elle ne permet de calculer qu'un coefficient de sécurité (Chapitre 2). La méthode des éléments finis est plus polyvalente et, en conséquence, on lui a consacré une place plus importante dans ce rapport. En plus

importance of understanding changes in stresses and corresponding deformations within an earth dam has been emphasised by recent studies of the phenomenon of hydraulic fracture (Kjaernsli and Torblaa, 1968; Sherard, 1973; Kulhawy and Gurtowski, 1976).

While development of cracks followed by piping can lead and, as the statistics show in many cases, actually has led to failure, an understanding of stresses and deformations within an embankment is desirable, even when failure is not imminent. It is a common practice to instrument large dams and to monitor their behaviour. To evaluate the data and especially to decide whether the observed behaviour is within the expected range one has to know first what the expected range is. Since many dams are unique in their behaviour it is often impossible to extrapolate the behavioural data from one project to another. The stresses and deformations have to be studied, therefore, by means of an analytical model of the particular dam.

Table 1.1. - Statistics of Causes of Earth Dam Failures

Cause of failure	Compiled according to Middlebrooks (1953)		Compiled according to Babb and Mermel (1968)	
	Number of registered cases	%	Number of registered cases	%
Overtopping	68	36.1	60	34.8
Piping	63	33.5	45	26.0
Steady Seepage	25	13.3	29	16.8
During and immediately after construction	23	12.2	25	14.4
Rapid Drawdown	5	2.7	9	5.2
During first Impounding	4	2.2	5	2.8
<b>TOTAL</b>	<b>188</b>	<b>100.0</b>	<b>173</b>	<b>100.0</b>

#### 1.4. METHODS OF ANALYSIS

It is not appropriate in a report of this nature to describe the mathematical formulations of the various methods used for the analysis of embankment dams. It will suffice to indicate here which are used and their relative importance, and in the forthcoming chapters to illustrate their application.

The principal methods are the limit equilibrium and finite element methods. Fig. 1.1. shows the scheme of static analyses required. The stress and deformation side of the scheme represents a complex boundary value problem of continuum mechanics. The problem had been practically unsolvable until the advent of the finite element method. The limit equilibrium method is restrictive in that it can only be used to determine a safety factor. This is considered in Chapter 2. The finite element method is more versatile and consequently much of this report is devoted to it. In addition to its well established role for predicting displacements and stresses it can be

de son rôle bien connu dans la détermination des champs de contraintes et de déplacements, la méthode des éléments finis peut aider à calculer un coefficient de sécurité (bien que cette possibilité soit rarement utilisée). La méthode des éléments finis permet aussi les calculs d'écoulements en milieu poreux et les calculs de consolidation. D'autres aspects particuliers des barrages en remblai peuvent être modélisés par la méthode des éléments finis. Par exemple, le phénomène de contraction ou de ramollissement de la recharge amont lors de la mise en eau, ou bien la nécessité de prévoir la réponse du barrage à une variation du champ des pressions interstitielles. On trouve maintenant de nombreux textes de référence sur la méthode des éléments finis, parmi lesquels le premier et probablement le plus connu est celui de Zienkiewicz (1977), maintenant dans sa 3<sup>ème</sup> édition. Le lecteur intéressé pourra trouver une liste de plus de 30 d'entre eux dans le chapitre 12 de Hinton et Owen (1979). Il y trouvera aussi quelques commentaires utiles.

Un calcul par éléments finis est exécuté sur un modèle idéalisé, dans lequel on doit faire de nombreuses simplifications ou hypothèses sur la géométrie, le chargement et les matériaux.

Il est clair que mieux ces hypothèses représenteront la réalité, plus les résultats seront précis. Cependant, il n'y a pas de relation proportionnelle entre la finesse des hypothèses et l'utilité des résultats. Un calcul très raffiné ne donne pas forcément des informations plus précises ou plus fiables sur le comportement d'un barrage en terre. On peut sans doute définir deux limites pour la complexité des hypothèses à faire dans un calcul par éléments finis d'un barrage en terre. La limite inférieure est celle au-dessous de laquelle le calcul est trop simplifié et donne des résultats très inexacts ou même faux. La limite supérieure est celle au-delà de laquelle un perfectionnement des modèles conduit à une amélioration marginale de la qualité des résultats pour une augmentation excessive du coût (par accroissement des temps de calcul, du volume des données, des essais géotechniques nécessaires). Un des objectifs prioritaires de la recherche dans ce domaine est d'établir ces limites pour les différentes étapes dans la vie d'un barrage en remblai.

Les conditions de chargement d'un barrage en remblai sont tellement différentes au cours de sa vie qu'il est nécessaire de faire une analyse particulière pour chacune d'entre elles.

D'autres méthodes numériques doivent être citées: les différences finies, les équations intégrales et les méthodes d'optimisation. La méthode des différences finies a été largement remplacée par la méthode des éléments finis. On l'a quelquefois décrite comme un cas particulier de la méthode des éléments finis dans la mesure où les matrices de rigidité globale sont assez semblables en différences finies et en éléments finis quand on utilise les éléments simples. Les techniques de différences finies coexistent quelquefois avec la méthode des éléments finis, par exemple dans l'étude de la consolidation où l'on discrétise l'espace en éléments finis et le temps en différences finies. La méthode des équations intégrales ne semble pas avoir beaucoup d'applications dans le domaine des barrages en remblai. Mais elle pourrait avoir un rôle à jouer dans le calcul tridimensionnel. Elle est limitée à l'analyse élastique linéaire et ne peut prendre en compte les variations des propriétés des matériaux, comme cela se produit d'une zone à l'autre du barrage. Le lecteur trouvera dans Brebbia (1978) une présentation de cette méthode. Les méthodes d'optimisation peuvent remplacer les calculs classiques d'équilibre limite. Ces méthodes permettent d'éliminer les erreurs d'approximation dans les méthodes traditionnelles, bien qu'on ne les ait pas encore beaucoup utilisées à ce jour. Martins (1982) donne des applications de ces méthodes aux calculs de stabilité de talus.

On soulève souvent le problème de la nature des contraintes à utiliser: contraintes totales ou contraintes effectives? Le choix dépend à la fois de considérations purement techniques, de tradition locale et de l'expérience du problème à traiter. Dans ce rapport, on a pris une approche pragmatique: il faut utiliser la méthode la mieux adaptée au problème posé! Il faut toutefois noter que la tendance actuelle est à la généralisation de l'utilisation des contraintes effectives. Cet engouement vient de la polyvalence qu'entraîne la possibilité de traiter séparément les pressions interstitielles, ce qui est particulièrement utile pour les calculs des phases de construction

(although not often is) used to determine a safety factor. It is also used for seepage and time dependent consolidation analysis. There are features peculiar to fill dams which can be modelled by the finite element method. Two considered in this report are the phenomenon of shrinkage, or softening of the upstream shell when the reservoir is first filled, and the need to predict the response of the dam to known or assumed changes in pore pressure. There are many texts now available on the finite element method of which the first and probably the best known is the text by Zienkiewicz (1977) now in its third edition. The interested reader will find a list of over 30 of them in Chapter 12 of Hinton and Owen (1979), together with some helpful comments.

A finite elements analysis is performed on an idealisation of the real structure. In order to perform the analysis, numerous idealisations and assumptions have to be made about the geometry, loading and the materials present.

It is quite obvious that the closer the assumptions reflect reality, the more accurate the results should be. There is not, however, a generally valid proportionality between the sophistication of assumptions and usefulness of results. Refinement of the analysis does not necessarily yield more accurate or more reliable information about the behaviour of an earth dam. There are, perhaps, two bounds of complexity of assumptions for finite element analyses of earth dams. A lower one, below which the analysis is oversimplified, which yields results that are grossly inaccurate or wrong. And an upper limit of complexity, above which the quality of results is improved only marginally, but at the cost of excessive computing, too much soil testing and a surplus of data. A prime objective of research in this area is to establish such bounds for the various stages in the life of an embankment dam.

An embankment dam is subjected to various loading conditions during its life. Since the response of the dam to such varying conditions can be quite different it is necessary to perform separate analyses for each of them.

Of other computer based methods of analysis finite differences, boundary elements, and mathematical programming should be mentioned. The finite difference method has largely been superseded by the finite element method. Indeed it has been described as a subset of the finite element method (since the assembled finite difference coefficient matrix can be the same as the finite element method when simple elements are used). Finite difference techniques sometimes occur within the finite element method as, for example, in consolidation analysis where finite differences are used in time and finite elements in spatial discretisation. The boundary element method does not appear to have much application to fill dams although it may have a role in three dimensional analysis. It is subject to the restrictions that it is limited to linear elastic analysis and cannot cope with variations in material properties as occur from one zone in the dam to the next. The reader is referred to the text by Brebbia (1978) for an introduction to the method. Mathematical programming provides a possible alternative to the conventional limit equilibrium methods for determining a safety factor. It can virtually eliminate the errors due to the approximations in the conventional methods although it does not appear to have been used yet to any extent. Martins (1982) shows how it can be applied to slope stability analysis.

A question which often arises is should analyses be carried out in terms of total or effective stress? Which is chosen will depend partly on purely technical considerations and partly on the local tradition, or in which method there is most experience of the problem under consideration. A pragmatic problem should be used. It might be noted, however, that there does appear to be a trend towards the greater use of the effective stress method. Its attraction is the versatility achieved by separating the pore pressure from the total stress. The method really comes into its

ou de fin de construction, où l'on mesure les pressions interstitielles. Un récent exemple est l'analyse en retour du barrage de Monasavu, par Knight, Naylor et Davis (1985).

Les méthodes de calcul basées sur les critères de probabilité ne sont pas traitées dans le rapport. Il y a une controverse sur l'utilisation ou non de telles techniques. Aussi est-il souhaitable de ne pas aborder cette question.

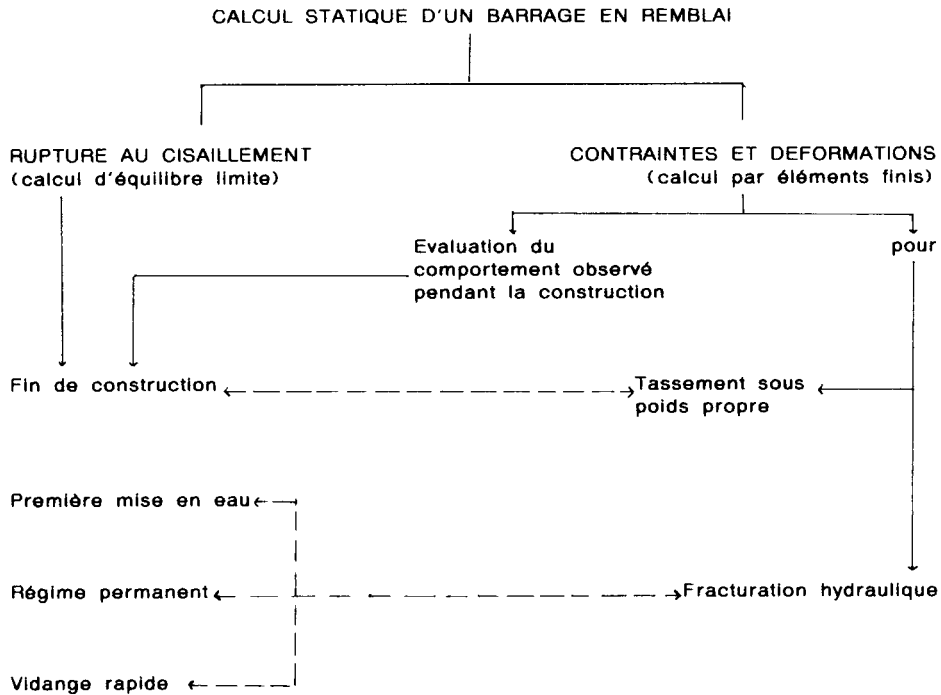


Fig. 1. 1. - Schéma du calcul statique des barrages en remblai

## REFERENCES

BABB, A.O. and MERMEL, T.W., 1968. *Catalog of dam disasters, failures and accidents*, US Bureau of Reclamation.

BREBBIA, C.A., 1978. *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London.

own for during- and post-construction analyses in which pore pressures are measured. A recent example of its use is the back analysis of Monasavu Dam by Knight, Naylor and Davis (1985).

Methods of analysis based on probability criteria are not covered in the report. This is a controversial area and there is disagreement as to whether or not it is even desirable to attempt to use such techniques. It is felt, therefore, best not to enter this arena.

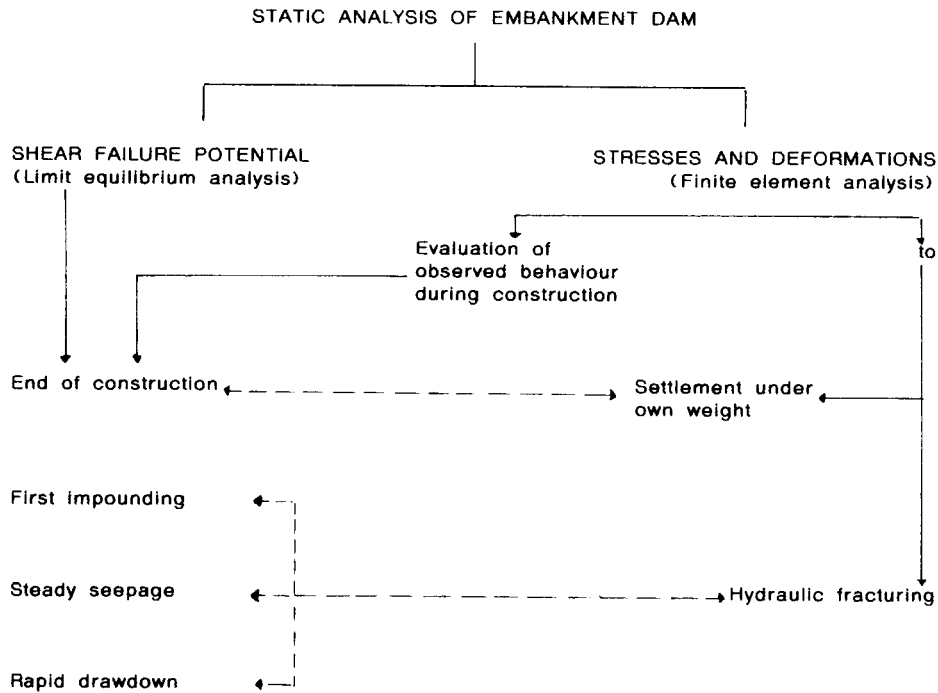


Fig. 1.1. - Scheme of static analysis of embankment dams

CLOUGH, R.W. and ZIENKIEWICZ, O.C., 1976. *Finite Element Methods in Analysis and Design of Dams*. Report of ICOLD Committee on Analysis and Design (May 1976).

HINTON, E. and OWEN, D.R.J., 1979. *An Introduction to Finite Element Computations*. Pineridge Press, Swansea.

KJAERNSLI, B. and TORBLAA, I., 1968. *Leakage Through Horizontal Cracks in the Core of Hyeteluvet Dam*. Norwegian Geot. Inst. Publ., no 80, Oslo.

KNIGHT, D.J., NAYLOR, D.J. and DAVIS, P., 1985. *Stress-Strain Behaviour of the Monasavu Soft Core Rockfill Dam: Prediction, Performance and Analysis*. Q56, 15th ICOLD (Lausanne), pp. 1299-1326.



KULHAWY, F.H. and GURTOWSKI, T.M., 1976. *Load Transfer and Hydraulic Fracturing in Zoned Dams*. J. Soil Mech., Fdn. Eng. Div., ASCE, 102, noGT9, pp.963-974.

MARTINS, J.B., 1982. *Embankments and Slopes by Mathematical Programming*. Numerical Methods in Geomechanics, Ed. Martins, J.B., Reidel, pp.305-334.

MIDDLEBROOKS, T.A., 1953. *Earth Dam Practice in the United States*. Transactions, ASCE, Centennial Volume, pp.697.

SHERARD, J.L., 1973. *Embankment Dam Cracking*. In Casagrande's Volume on Embankment Dam Engineering, Wiley, New York, pp.271-354.

ZIENKIEWICZ, O.C., 1977. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 3rd edition.



---

## 2. CALCUL DE LA STABILITÉ DES TALUS

---

### 2.1. INTRODUCTION

Avant 1970, les calculs de conception des barrages en terre étaient faits presque exclusivement en termes d'équilibre limite. Ces calculs permettent de déterminer un nombre: le coefficient de sécurité, qu'on peut définir, avec Morgenstern et Sangrey, 1978, comme:

« Le facteur par lequel on peut réduire les caractéristiques de résistance au cisaillement pour que le talus étudié se trouve en état d'équilibre limite le long d'une surface de rupture donnée ».

Le coefficient de sécurité a un rôle double:

- (1) il prend en compte certaines incertitudes: les paramètres de résistance au cisaillement, les pressions interstitielles, le poids du sol et la géométrie du barrage;
- (2) il limite indirectement les déformations.

Cependant, les méthodes d'équilibre limite ne peuvent donner aucune information sur les déformations sous chargement ni sur l'amorce de la rupture et la façon dont celle-ci se propage au voisinage de la limite de stabilité. De plus, ces méthodes n'évaluent pas, de façon rigoureuse, les conditions de rupture et ne sont qu'approximatives.

Même si les paramètres de résistance sont exacts, le coefficient de sécurité peut être sur ou sous-estimé. C'est seulement dans un petit nombre de cas qu'une solution précise est obtenue.

Des développements récents de la méthode des éléments finis ont permis de modéliser le début de la rupture et ont apporté des renseignements inaccessibles avec les méthodes aux limites. On peut utiliser la méthode des éléments finis (et on l'a fait) pour déterminer le coefficient de sécurité, mais cette procédure est encore coûteuse en temps de calcul et reste du domaine de la recherche. Ce rôle de la méthode des éléments finis est exposé dans la dernière partie de ce chapitre, qui présente d'abord plus en détail les méthodes d'équilibre limite.

### 2.2. MÉTHODES D'ÉQUILIBRE LIMITE

Les méthodes d'équilibre limite sont construites sur:

- (1) des hypothèses sur la forme et la position des surfaces de rupture cinématiquement possibles sur les talus amont ou aval;
- (2) la connaissance des résistances au cisaillement des matériaux du barrage et de sa fondation (de préférence en termes de contraintes effectives);
- (3) dans le cas d'un calcul en contraintes effectives, la connaissance du champ de pressions interstitielles;

---

## 2. ANALYSIS OF SLOPE STABILITY

---

### 2.1. INTRODUCTION

Prior to about 1970, analyses for design of earth dams had been done almost exclusively in terms of limit equilibrium concepts. These analyses can determine one number, the Factor of Safety, usually defined (by Morgenstern and Sangrey, 1978) as:

« The factor by which the shear strength parameter may be reduced in order to bring the slope into a state of limiting equilibrium along a given slip surface ».

The Factor of Safety has a dual role:

- (1) It accounts for uncertainties in the analyses, namely the shear strength parameters, pore pressures, weight of soil and dam geometry;
- (2) It limits, indirectly, deformations.

Limit equilibrium methods cannot, however, provide any information about the magnitude of deformations under working conditions or about the initiation of yield and the way it spreads as a failure condition is approached. Furthermore, it should be noted that these methods do not in general produce a rigorous measure of the conditions for failure. They are approximate.

Even if the strength parameters are correct the safety factor can be over or under-estimated. Only in a few special cases can a precise solution be obtained.

Recently, the finite element method has been developed so that it can model the approach to failure thereby providing information unavailable from the limit methods. It can, and has been used to find the safety factor, but this is expensive in computing time and at least for the present is in the domain of research. The finite element method in this role is considered in the latter part of this chapter after a more comprehensive treatment of the relatively important limit equilibrium methods.

### 2.2. LIMIT EQUILIBRIUM ANALYSES

Limit equilibrium analyses are based on:

- (1) assumptions regarding the shape and position of a kinematically possible slip surface within the upstream or downstream slope of a dam;
- (2) knowledge of shear strength parameters of soils forming the dam and its foundation (preferably in terms of effective stresses);
- (3) in the case of effective stress analysis knowledge of pore pressure magnitude and distribution throughout the dam;

(4) des hypothèses sur le champ de contraintes le long de la surface de rupture et au-dessus de celle-ci;

(5) l'application des règles de la statique afin d'exprimer l'équilibre de la masse de sol le long de la surface supposée de rupture.

Un assez grand nombre de ces méthodes a été développé. Presque toutes sont des méthodes de tranches, dans lesquelles on découpe le matériau en tranches généralement verticales au-dessus de la surface de rupture. Les améliorations successives de ces méthodes ont eu pour objet de réduire les erreurs dues: à la trop forte simplification de la forme des surfaces de rupture, à la mauvaise évaluation des contraintes normales. Cette dernière cause d'erreur est potentiellement plus importante dans les matériaux pulvérulents, pour lesquels la résistance au cisaillement dépend de la contrainte normale.

Les principales méthodes sont décrites dans les articles et ouvrages suivants: Fellenius (1939); Taylor (1948); Bishop (1955); Morgenstern et Price (1965); Spencer (1967); Janbu (1973); Sharma (1979). Les détails sont donnés dans la plupart des cours de géotechnique et ne seront pas présentés ici.

Les méthodes se distinguent surtout par:

- (1) leurs hypothèses sur la surface de rupture (cercle, *coin*, ou forme quelconque);
- (2) leurs conditions d'application des règles de la statique.

Certaines des méthodes les plus anciennes ne demandent que peu de calculs, alors que les plus récentes exigent l'utilisation d'ordinateurs (Morgenstern et Price, 1965). Cependant, même les méthodes les plus simples utilisent maintenant couramment le calcul automatique. On attribue à Little et Price (1958) la première utilisation d'un ordinateur pour un calcul de stabilité de barrage en terre. Leur programme était basé sur la méthode de Bishop simplifiée, et fut appliqué au barrage de Tryweryn, dans le Royaume-Uni. Depuis lors, des douzaines de programmes de stabilité de talus ont été décrits dans la littérature ainsi que leurs applications à des projets de barrages en terre. Certains de ces programmes ne sont que les versions automatiques (et donc plus puissantes) de méthodes de stabilité ne nécessitant pas, à l'origine, de calculs automatiques. Ces programmes ne demandent que des modifications mineures des hypothèses de base des méthodes: la plupart d'entre eux sont des versions informatisées des méthodes de Fellenius et de Bishop.

L'amélioration de la puissance des ordinateurs a conduit au développement de nouvelles méthodes de calcul de stabilité plus complexes. Elles satisfont plus exactement les exigences des équilibres statiques et autorisent des surfaces de rupture non-circulaires. La méthode de Morgenstern et Price (1965), très souvent utilisée, est un exemple classique des méthodes de cette catégorie.

La facilité de calcul sur un ordinateur permet de comparer les résultats des méthodes existantes. Ce besoin est particulièrement évident si l'on considère qu'il existe aujourd'hui une douzaine de méthodes d'équilibre limite de calcul de stabilité de talus (Wright, 1969). Fredlund et Krahn (1976) ont comparé six des méthodes les plus utilisées:

- (1) Méthode ordinaire  
(méthode de Fellenius, ou méthode suédoise, ou méthode classique).
- (2) Bishop simplifiée.
- (3) Spencer.
- (4) Janbu simplifiée.
- (5) Janbu exacte.
- (6) Morgenstern-Price.

Ces méthodes considèrent des coefficients de sécurité basés sur l'expression explicite des équilibres de forces ou de moments. Dans les deux cas, ce coefficient est défini comme le facteur par lequel il faut réduire la résistance au cisaillement pour entraîner la rupture. Pour les méthodes satisfaisant entièrement les exigences de

(4) assumptions about distribution and magnitude of internal stresses along and above the assumed slip surface;

(5) application of statics in order to investigate equilibrium of the soil mass along the assumed slip surface.

A relatively large number of methods have been developed. Nearly all of them are methods of slices, the material above the slip surface being divided into a number of usually vertical slices. Improvements in the methods have aimed at reducing the error due to oversimplifying the shape of the slip surface and the resulting from an incorrect determination of the normal stress. The latter is potentially important for frictional materials where the shear strength will depend on the normal stress.

The principal methods are described in the following books and papers: Fellenius (1939); Taylor (1948); Bishop (1955); Morgenstern and Price (1965); Spencer (1967); Janbu (1973); Sharma (1979). Details are given in most geotechnical text books and will not be presented here.

The methods differ primarily in:

- (1) their assumptions about the slip surface (circular, wedge, or of general shape);
- (2) their application of soil statics.

Some of the earlier methods required relatively little computational effort, while the more advanced methods are not practicable without computers (Morgenstern and Price, 1965). However, even the simple methods are nowadays routinely performed as automated calculations. The first use of a computer for a limit equilibrium analysis of an earth dam is attributed to Little and Price (1958). Their program was based on the simplified Bishop's method and was applied to the Tryweryn Dam in the United Kingdom. Since then, dozens of slope stability programs and their application to earth dam projects have been described in the literature. Some of the programs provided merely an automated and thus more powerful version of existing methods of slope stability analysis originally developed for non-automated calculations. Such programs, however, made very little change to the assumptions on which the methods were based. Most common examples of this category are programmed versions of the Swedish and Bishop methods.

The increase in the power of performing mathematical and logical operations brought about by computers soon led to the development of new and more complex slope stability methods. These satisfied more accurately the requirements of static equilibrium and provided for non circular slip surfaces. The widely adopted method of Morgenstern and Price (1965) is a classical example of this development.

The ease with which numerical calculations could be performed using a computer made it possible to compare various available methods in terms of their results. The need for this becomes particularly obvious considering that there are about a dozen limit equilibrium methods of slope stability analysis existing today (Wright, 1969). Fredlund and Krahn (1976) compared six of the most commonly used methods, namely:

- (1) Ordinary (Fellenius, Swedish or conventional),
- (2) Simplified Bishop,
- (3) Spencer's,
- (4) Janbu's simplified,
- (5) Janbu's rigorous,
- (6) Morgenstern-Price.

They considered Factors of Safety based on the explicit satisfaction of either force or moment equilibrium. In both cases it was the factor by which the shear strength had to be reduced to induce failure. The force ( $F_f$ ) and moment ( $F_m$ ) factors would be identical if the method used to calculate them fully satisfied the requirements of static equilibrium. By adjustment of a parameter,  $\lambda$ , (see below) the Spencer and Morgenstern-Price methods can satisfy both (moment and force) conditions of

l'équilibre statique, les coefficients de sécurité pour les forces ( $F_f$ ) et pour les moments ( $F_m$ ) doivent être identiques. Dans les méthodes de Morgenstern et Price et de Spencer (voir plus loin), l'ajustement du paramètre  $\lambda$  permet de satisfaire les deux équilibres (en forces et en moments) pour donner un seul coefficient de sécurité. Les méthodes de Janbu ne satisfont que l'équilibre des forces. Les méthodes de Fellenius et de Bishop ne satisfont que l'équilibre des moments.

En prenant l'exemple d'un talus simple (Fig. 2.1.), Fredlund et Krahn (*op.cit.*) comparent les coefficients de sécurité des deux types ( $F_f$  et  $F_m$ ) pour les différentes méthodes, à l'exception de la méthode ordinaire (Fig. 2.2.). Les coefficients de sécurité sont reportés en fonction du paramètre  $\lambda$  qui détermine la position de la ligne d'action des forces inter-tranches, qu'on définit par:

$$\lambda = f(x) = X/E \quad (2.1)$$

où:

$f(x)$  est la fonction définissant la forme de la ligne d'action dans la zone de rupture potentielle,  $x$  étant la coordonnée horizontale;

$X$  est la composante verticale de la réaction inter-tranche;

$E$  est la composante horizontale de la réaction inter-tranche.

La méthode de Bishop simplifiée satisfait l'équilibre global des moments, en supposant que  $X$  est nulle donc que  $\lambda$  est nul aussi. Dans la méthode de Spencer,  $\lambda$  est la tangente de l'angle entre l'horizontale et la réaction inter-tranche (c'est-à-dire  $f(x) = \text{constante}$ ). La méthode de Morgenstern et Price permet plusieurs hypothèses sur  $f(x)$  et la méthode de Spencer en est donc un cas particulier.

Les résultats montrent que le coefficient de sécurité obtenu en satisfaisant l'équilibre des moments est relativement insensible à la direction des réactions inter-tranches ( $\lambda$ ). Donc, les coefficients de sécurité obtenus par les méthodes de Spencer et de Morgenstern et Price sont généralement très proches de ceux calculés par Bishop simplifiée. Par contre, le coefficient de sécurité calculé avec l'équilibre global des forces est beaucoup plus sensible aux hypothèses sur des forces inter-tranches.

Une autre technique, encore peu utilisée dans le domaine des barrages, et pourtant forte d'un potentiel considérable, est celle de Sharma (1979). Comme les méthodes de Spencer et de Morgenstern et Price, cette méthode satisfait les deux équilibres (forces et moments). De même, elle admet toutes les formes de surfaces de rupture (à condition qu'elles soient cinématiquement possibles). Cette méthode diffère des précédentes sur deux points.

1.

Au lieu de résoudre directement en  $F$ , on détermine explicitement la valeur critique  $K_c$  d'un coefficient d'accélération horizontale  $K$ , pour une valeur supposée de  $F$ . Par exemple, dans un calcul statique ( $K=0$ ), on détermine une courbe de  $K_c$  en fonction de  $F$ . La valeur du coefficient de sécurité cherché est tirée de cette courbe, en prenant la valeur de  $F$  pour laquelle  $K_c=0$ . Cette méthode peut être aussi bien utilisée pour le calcul sismique pseudo-statique, dans lequel par exemple  $K=0,1$ .

2.

On suppose qu'il y a glissement sur les faces inter-tranches et que celles-ci peuvent être inclinées selon des pentes différentes (Fig. 2.3a.). Cette méthode est donc une généralisation du coin de Coulomb. Un algorithme itératif permet d'explorer les différentes pentes des faces des tranches afin de minimiser le coefficient de sécurité pour une surface de rupture donnée.

Cette méthode est polyvalente et peut être utilisée pour obtenir de bonnes approximations des charges de rupture dans les problèmes de fondations, comme le problème de Prandtl d'une semelle superficielle sur un sol pulvérulent. Cependant, on ne connaît pas la sensibilité du coefficient calculé à la position des limites de

equilibrium to give a unique Factor of Safety. The Janbu methods satisfy force equilibrium only. The ordinary and Bishop methods are based on moment equilibrium.

Taking a simple slope as an example (Fig.2.1.), Fredlund and Krahn (*op.cit.*) compared the Factors of Safety obtained in these two ways ( $F_t$  and  $F_m$ ) for the various methods (with the exception of the ordinary method) in Fig.2.2. The Factors of Safety are plotted against the parameter  $\lambda$  which controls the position of the line of thrust of the interslice forces. It is defined by the equation:

$$\lambda \cdot f(x) = X/E \quad (2.1)$$

where:

$f(x)$  is a function defining the shape of the line of thrust over the width of the potential slip,  $x$  being the horizontal coordinate;

$X$  is a vertical interslice force;

$E$  is a horizontal interslice force.

The simplified Bishop's method satisfies overall moment equilibrium with  $X$  assumed zero implying  $\lambda$  equal to zero. Spencer's method has  $\lambda$  equal to the tangent of the angle between the horizontal and the resultant interslice force, i.e.  $f(x) = \text{constant}$ . The Morgenstern-Price method allows a variety of different  $f(x)$  assumptions, and includes Spencer's method as a special case.

The results indicate that the Factor of Safety obtained by satisfying moment equilibrium is relatively insensitive to the interslice force assumption ( $\lambda$ ). Therefore, the Factors of Safety obtained by the Spencer and Morgenstern-Price methods are generally similar to those computed by the simplified Bishop method. However, the Factor of Safety based on overall force equilibrium is far more sensitive to the side force assumption.

Another technique little used in the analysis of dams as yet, but which has considerable potential, is that due to Sharma (1979). This, like the Spencer and Morgenstern-Price methods, results in a Safety Factor ( $F$ ) which satisfies both force and moment equilibrium. Also there is no restriction on the shape of the slip slope (except of course that it must be kinematically admissible). The technique differs from the earlier methods in two respects.

1. Instead of solving directly for  $F$  the critical value  $K_c$  of a horizontal *acceleration factor*,  $K$ , is determined explicitly for an assumed value of  $F$ . When  $K$  is zero, as in a static analysis, trial values of  $F$  are used to define a  $K_c:F$  curve from which the value of  $F$  corresponding to  $K_c = 0$  is the desired Safety Factor. Equally well the method may be used for the pseudo-static type of earthquake analysis in which  $K$  is assigned a value such as 0.1.

2. Slipping is assumed on the interslice faces and these faces can be inclined at varying angles (Fig.2.3a.). This makes the method a generalisation of the Coulomb wedge. An iterative procedure is used which explores different inclinations of the slice faces from which a minimum Safety Factor for a given slip surface profile is determined.

The method is versatile and can be used to obtain good approximations to the collapse loads in bearing capacity problems such as the Prandtl solution to a footing on a non-cohesive soil. It is not, however, known how sensitive the computed factor is to the position of the interslice boundaries. In the example of the Prandtl footing the wedges which move *en masse* are not subdivided whereas the region of continual



tranches. Dans l'exemple de Prandtl, les coins qui se déplacent *en masse* ne sont pas subdivisés, alors que la région intermédiaire est partagée en tranches, que le processus itératif convertit en triangles (Fig. 2.3b.). Le programme ne détermine pas la position des limites de tranches, mais seulement leur pente. Cependant, cette méthode devrait être de plus en plus utilisée dans le domaine des barrages où les ruptures potentielles à considérer vont du coin au cercle de glissement.

En plus de leurs différences dans l'application de la statique et dans le traitement des forces internes, les méthodes de calcul de stabilité de talus diffèrent par leur complexité de calcul, et en particulier par leur coût et leurs besoins en temps de calcul.

Fredlund et Krahn (*op.cit.*) ont comparé les six méthodes en terme de temps d'unité centrale (CPU) pour le cercle de glissement indiqué sur la Fig. 2.1. Environ 88 tranches furent utilisées. La Fig. 2.4. montre les temps CPU obtenus sur un ordinateur IBM 370/158. La méthode de Spencer a été appliquée en prenant quatre valeurs différentes de l'inclinaison des réactions inter-tranches. La méthode de Morgenstern et Price a été appliquée en prenant six valeurs de  $\lambda$ . Dans ces deux méthodes, il est nécessaire de prendre au moins trois valeurs de  $\lambda$  pour déterminer le coefficient de sécurité. Les méthodes de Spencer et de Morgenstern et Price demandent donc beaucoup plus de temps de calcul que la méthode de Bishop simplifiée.

Les méthodes d'équilibre limite d'analyse des stabilités de talus sont souvent critiquées pour leurs imperfections théoriques. Wright et *al.* (1973) ont résumé ces critiques en trois points:

1. Des hypothèses arbitraires sont employées pour déterminer la distribution des contraintes normales le long de la surface de glissement, en utilisant seulement les conditions d'équilibre statique et sans considérer les relations contrainte-déformation du sol. Ces hypothèses arbitraires concernent le plus souvent les positions et directions des réactions inter-tranches (par exemple, la valeur de  $\lambda$  dans la méthode de Morgenstern et Price).
2. La plupart des méthodes de stabilité font l'hypothèse que le coefficient de sécurité est le même pour toutes les tranches, alors que cette hypothèse n'est justifiée qu'au moment de la rupture, quand le coefficient de sécurité vaut un pour toutes les tranches.
3. Quelques méthodes de stabilité (par exemple, les méthodes de Fellenius et de Bishop simplifiée) ne satisfont pas toutes les conditions d'équilibre .

Wright et *al.* (*op.cit.*) ont examiné la valeur relative de ces critiques en comparant, pour un ensemble de talus simples, les résultats obtenus par la méthode de Bishop simplifiée à ceux d'un calcul par éléments finis. Ils ont montré que la distribution des contraintes normales le long de la surface de glissement était raisonnablement semblable pour les deux méthodes, en particulier pour les pentes assez faibles et pour les cohésions assez faibles. Cependant, leur étude a porté sur des matériaux homogènes en élasticité linéaire et leurs conclusions peuvent ne pas être parfaitement valables pour des barrages zonés.

Par comparaison entre les éléments finis et la méthode de Bishop simplifiée, on a étudié aussi les effets des variations d'une mobilisation non uniforme de la résistance au cisaillement le long de la surface de rupture, c'est-à-dire de l'inégalité des coefficients de sécurité pour différentes tranches. La Fig. 2.5. montre, pour chaque tranche, les valeurs locales du coefficient de sécurité. Pour les cas étudiés, la valeur globale du coefficient de sécurité était de un. Les variations locales du coefficient de sécurité peuvent être importantes avec même quelques tranches où ce coefficient devient inférieur à l'unité. Cependant, le point important de la comparaison est que les valeurs des coefficients de sécurité globaux obtenus par la méthode des éléments finis diffèrent de moins de 8% de ceux obtenus par la méthode de Bishop simplifiée.

shearing is divided into several slices which the iterative procedure converts to triangles (Fig. 2.3b.). The program does not determine the position of the slice boundaries, only their slope. Nevertheless the method should lend itself well to the stability analysis of dams where potential failures ranging from sliding wedges to circular slips need to be considered.

In addition to the differences in application of soil statics and in the treatment of internal forces the methods of slope analysis also differ in their computational complexity. The differences in requirements of computer time and cost between the methods could be significant.

Fredlund and Krahn (*op.cit.*) compared the six methods in terms of the CPU time needed for the trial slip circle shown in Fig. 2.1. About 88 slices were used. The results obtained with an IBM 370 Model 158 computer are shown in Fig. 2.4. The Factor of Safety by Spencer's method was computed using four different assumptions about side force angles. The Factor of Safety by the Morgenstern-Price method was determined using six  $\lambda$  values. At least three  $\lambda$  trial values are required both in this method and in the Spencer method (where  $\lambda$  is the tangent of the angle of inclination of the interslice forces) to obtain the Factor of Safety. Therefore, the Spencer and Morgenstern-Price methods require considerably more computer time than the simplified Bishop method.

The limit equilibrium methods of slope stability analysis are often criticised for their theoretical shortcomings. Wright *et al.* (1973) summarized the criticism in three points.

1. Arbitrary assumptions are employed so that the distribution of normal stress on the shear surface may be determined using only the conditions of static equilibrium, without consideration of the stress-strain characteristics of the soil. These arbitrary assumptions most frequently concern the locations or directions of side forces on slices (e.g. the  $\lambda$  value in the Morgenstern-Price method).
2. Most of the equilibrium methods involve the assumption that the Factor of Safety is the same for every slice, even though there is no reason to accept this to be true except at failure, when the Factor of Safety is equal to one for every slice.
3. Some of the equilibrium methods (e.g. the ordinary method and the simplified Bishop's method) do not satisfy all the conditions of equilibrium.

Wright *et al.* (*op.cit.*) examined the relative validity of these criticisms by comparing results of the simplified Bishop's method with results obtained using the finite element method of analysis for a parametric set of simple slopes. They found reasonable agreement of the distribution of normal stresses along the shear surface between Bishop's method and the finite element analysis, particularly for relatively flat slopes with relatively low values of cohesion. Their studies, however, assumed homogeneous linear elastic material and their conclusions may not therefore be fully valid, particularly for zoned dams.

The effect of non-uniform mobilisation of shear strength along the shear surface and thus of varying values of Factors of Safety for different slices was studied by comparing the simplified Bishop's method with finite element results. The variation in Factor of Safety for individual slices along shear surfaces which exhibit an overall equilibrium Factor of Safety of one is shown in Fig. 2.5. While the Factor of Safety for individual slices varies considerably along the shear surface (with some overstress, i.e. factors less than one), the interesting point was that the average value of Factor of Safety determined by the finite element method differed from the value of one (obtained by the simplified Bishop's method) by, at most, 8%.

Un facteur important qui n'est pas explicitement pris en compte dans l'étude de stabilité est le phénomène de rupture progressive. Les matériaux traversés par une surface de glissement potentiel présenteront en général une pointe de résistance. Les déformations nécessaires pour mobiliser cette pointe devront très probablement être atteintes localement, bien que le coefficient de sécurité global puisse être acceptable. La question importante est de savoir si l'affaissement local se propagera ou non, ce qui dépendra beaucoup de la raideur de la pente de la courbe déformation-contraînte après pointe. Un projet prudent adoptera des résistances après pointe relatives à la partie de courbe, au-delà de la pointe, où la courbe commence à s'aplatir. Ceci est obtenu pour des déformations beaucoup plus petites que les déformations résiduelles. Skempton et Coates (1985) ont utilisé le terme d'*état critique* pour décrire les résistances dans cette zone.

Les travaux de Wright et al. (*op.cit.*) ont insisté sur les conséquences des erreurs sur la répartition des contraintes normales le long de la surface de glissement. On doit aussi considérer l'influence des erreurs induites par la surface de glissement elle-même, soit parce qu'on lui donne une forme trop simple (cercle ou plan), soit parce que sa position est incorrecte. Il est important d'insister sur le fait que les erreurs de ce type conduisent à une surévaluation de la sécurité, qui peut être importante dans les cas extrêmes. En particulier, David et Booker (1973) ont comparé des calculs de ruptures, circulaires, avec les solutions exactes, pour une semelle sur un matériau dont la cohésion augmente avec la profondeur. Ces auteurs ont trouvé que le calcul de stabilité pour une surface de glissement circulaire donnait un coefficient de sécurité jusqu'à quatre fois supérieur à la réalité (Fig. 2.6.). Leur hypothèse de matériau cohésif ( $\phi=0$ ) entraîne que cette erreur est uniquement due à la forme de la surface de rupture. En effet, la résistance au cisaillement n'est pas influencée par la répartition des contraintes normales. Cet exemple est à rapprocher du cas des barrages et des remblais sur mauvaises fondations. Il montre que l'hypothèse de rupture circulaire pourrait être dangereuse dans ce cas et qu'une surface de rupture polygonale (proche de la surface, ou coin glissant) serait généralement plus réaliste.

### 2.3. CALCUL DE LA STABILITÉ PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Pourvu qu'on l'utilise avec une loi rhéologique non-linéaire incluant le critère de rupture de Mohr-Coulomb (c'est-à-dire défini par  $c$  et  $\phi$ ), la méthode des éléments finis peut servir à estimer le coefficient de sécurité tel qu'on l'a défini ci-dessus. Une succession de calculs, effectués avec des  $c$  et  $\tan\phi$  progressivement divisés par un facteur  $\alpha$ , va donner des déplacements de plus en plus grands pour les points situés au-dessus de la surface de rupture potentielle. En construisant, pour un ou plusieurs points de ce domaine, la courbe des déplacements en fonction de  $\alpha$  et en l'extrapolant, on peut trouver une valeur de  $\alpha$  pour les déplacements indéfiniment grands, et appeler cette valeur le coefficient de sécurité. Cette méthode est intéressante parce que, en principe, elle devrait satisfaire à la fois le critère de rupture et les conditions d'équilibre statique, avec une approximation raisonnable. Elle devrait donc éviter les faiblesses théoriques des méthodes d'équilibre limite sur ce dernier point. De plus, elle donne des informations sur le développement du processus de rupture, comme on l'a déjà vu sur la Fig. 2.5.

Cette méthode a été utilisée avec succès par Zienkiewicz et al. (1975) et par Naylor (1982a). Cependant, le succès dépend de l'algorithme choisi dans le programme d'éléments finis, pour la loi rhéologique non-linéaire. L'algorithme utilisé par Naylor (*op.cit.*) était un algorithme de contrainte initiale qui convenait bien à la simulation de la rupture dans les matériaux purement cohésifs ( $\phi=0$ ) mais qui donnait une mauvaise définition de la rupture dans les matériaux avec frottement. L'algorithme visco-plastique de Zienkiewicz et al. (*op.cit.*) a donné des résultats satisfaisants pour les matériaux avec frottement. De même, Griffiths (1982) a utilisé avec succès la méthode visco-plastique et l'a appliquée à plusieurs problèmes de capacité portante en faisant des comparaisons avec des ruptures connues.

La détermination du coefficient de sécurité par cette méthode peut demander beaucoup de temps d'ordinateur dans la mesure où le calcul doit effectivement réduire

An important factor not explicitly taken into account in stability analysis is the phenomena of progressive failure. The materials through which a potential slip passes will generally have a peak strength. The shear strains required to mobilize this peak are quite likely to be reached locally although the overall safety factor may be acceptable. The important question will be whether or not local yielding will propagate, and this will depend very much on how steep is the slope of the post-peak stress-strain curve. Conservative design practice will assume post-peak strengths relating to the part of the curve beyond the peak where the curve has started to flatten off. This is typically achieved at strains much less than the residual strength strains. Skempton and Coates (1985) have used the adjective *critical state* to describe strengths in this area.

The work of Wright *et al.* (*op.cit.*) has focused on the consequences of error in the normal stress distribution on the slip surface. The consequences of the slip surface not being correct either because the assumed shape (usually a circle or plane) is too simple or because it is in the wrong position needs also to be considered. The error from this cause will always be on the *unsafe* side, a fact not widely appreciated. In extreme cases it can be severe. David and Booker (1973) have demonstrated this. They compared circular slip analyses which increase with depth. They found that the circular slip analysis overestimated the safety factor by up to four times (Fig. 2.6.). Their assumption of a cohesive material ( $\phi = 0$ ) implies that the error is entirely due to the shape of the slip surface. The stress across it would not affect the strength. This example is relevant to dams and embankments on weak foundations. It implies that the assumption of a circular slip here would be dangerous, a sliding wedge (or a shallow non-circular surface near the surface) would usually be more realistic.

### 2.3. THE FINITE ELEMENT METHOD FOR STABILITY ANALYSIS

The finite element method, provided it contains a non-linear stress-strain law incorporating the Mohr-Coulomb failure criterion (*i.e.* defined by  $c$  and  $\phi$ ), can be used to estimate the safety factor as defined above. Repeated analyses with  $c$  and  $\tan\phi$  progressively reduced by a factor  $\alpha$  (say) will produce progressively greater displacements of points above the potential failure surface. By extrapolating the  $\alpha$  displacement curve for a representative point (or points) in this region a value of  $\alpha$  corresponding to indefinitely large displacements can be estimated. This is taken as the Factor of Safety. The method has the attraction that it should, in principle, satisfy both the yield criterion and the requirements of statics (*i.e.* equilibrium) to a reasonable approximation. It should avoid the shortcomings of the limit equilibrium methods in this latter respect. Also it can give information on the development of yield (as has already been illustrated in Fig. 2.5.).

This method has been successfully applied to slopes by Zienkiewicz *et al.* (1975) and by Naylor (1982a). The success of the method appears, however, to be dependent on the type of algorithm used in the finite element program to implement the non-linear stress law. That used by Naylor (*op.cit.*) incorporated an *initial stress* based algorithm which produced well defined collapse states for cohesive ( $\phi = 0$ ) materials (as in the undrained loading of clay), but collapse was poorly defined for frictional materials. The visco-plastic algorithm used by Zienkiewicz *et al.* (*op.cit.*) worked satisfactorily with a frictional material. Griffiths (1982) also had success using the visco-plastic method, which he applied to a variety of bearing capacity problems and made comparisons with recognised collapse solutions.

Determination of the safety factor in this way can be very expensive in computing time because the analysis effectively reduces the safety factor from its actual value to

le coefficient de sécurité de sa valeur réelle à une valeur proche de l'unité. Ceci veut dire que plusieurs calculs non-linéaires sont nécessaires, dont chacun est susceptible de coûter au moins trois fois plus que le calcul non-linéaire du même problème sans réduction des résistances au cisaillement (c'est-à-dire  $\alpha=1$ ). De plus, le coût de ce dernier calcul est supérieur, d'un ordre de grandeur, à celui d'un calcul élastique linéaire, ce qui fait qu'on peut s'attendre au total à un coût supérieur de deux ordres de grandeur à celui d'un calcul élastique linéaire.

Une autre possibilité est d'utiliser la méthode des éléments finis en association avec le calcul en équilibre limite (cf. §.2.2. ci-dessus). La méthode des éléments finis peut donner des informations sur les mises en plasticité locales et déterminer les contraintes normales sur une surface de rupture supposée. Le point important est que le calcul en éléments finis est effectué dans les conditions normales, c'est-à-dire sans réduction des propriétés des matériaux. On économise ainsi un temps de calcul considérable. De plus, si le coefficient de sécurité est assez grand, de façon à ce qu'on ait peu de mises en plasticité locales, un calcul élastique linéaire peut apporter des résultats utiles. Naylor (1982a) a appelé cette méthode *Equilibre limite amélioré*. En la vérifiant sur l'exemple du talus vertical, dans un matériau cohésif, donnant un coefficient de sécurité de 1,60 le long d'une surface de rupture plane inclinée à  $45^\circ$ , il a obtenu des valeurs de 1,64 et 1,65 avec des calculs par éléments finis, respectivement en élasticité non-linéaire (critère de Tresca) et en élasticité linéaire. La Fig.2.7. (tirée du même article) montre les résultats d'un calcul par éléments finis pour un cercle de rupture:  $\tau$ , contrainte tangentielle, et  $\tau_f$  résistance au cisaillement;  $\tau$  approche  $\tau_f$  dans la zone du pied. Le coefficient de sécurité calculé s'élève à 2,24 (c'est le rapport des aires des deux courbes). Cette valeur est nettement plus forte que celle obtenue par ailleurs avec une méthode de programmation linéaire (1,92). Ceci suggère qu'une surface de rupture circulaire ne convient pas dans le cas considéré et illustre donc la remarque évoquée plus haut selon laquelle une définition incorrecte de la forme de la surface de rupture conduit à une surestimation du coefficient de sécurité. Les économies de temps de calcul réalisées avec la méthode d'équilibre limite *améliorée* sont en partie obérées par le travail de définition des contraintes le long de la ligne de glissement à partir des résultats du calcul par éléments finis.

Dans son étude du remblai d'essai de Empingham (dans l'Est de l'Angleterre), Naylor (1982b) a illustré l'utilisation de la méthode des éléments finis dans la compréhension des mécanismes à l'approche de la ruine. Ce barrage inhabituel est construit sur de l'argile raide du Lias et constitué du même matériau. Le remblai d'essai de 15 m de haut fut construit pour vérifier la validité des paramètres mécaniques de la fondation (en termes de contraintes totales). Si ces paramètres n'avaient pas été corrects, on aurait observé la ruine du remblai d'essai, ce qui ne fut pas le cas. Naylor profita de cette expérience pour étudier l'effet du rapport des raideurs supposées pour le remblai et pour la fondation dans le développement de la rupture. Bien que ceci n'affecte pas le coefficient de sécurité ultime, l'étude démontra que l'extension de la rupture dans la fondation (qui était le souci principal) était assez sensible aux propriétés mécaniques supposées du remblai. Ainsi, un remblai relativement mou (faible module d'Young) avec un fort coefficient de Poisson donne une rupture au cisaillement dans la fondation beaucoup plus tôt que dans le cas d'un coefficient de Poisson plus faible, ou d'un remblai plus raide. La Fig.2.8a montre le développement de la rupture de la fondation, pour un remblai mou à fort coefficient de Poisson. *OSR* (*Over-Stress-Ratio*) est le rapport d'excès de contrainte qui est homogène à l'inverse d'un coefficient local de sécurité. La Fig.2.8b montre les directions potentielles de glissement (placées dans ce cas à  $45^\circ$  des directions des contraintes principales, car  $\phi=0$ ) à l'aide desquelles on a pu dessiner une ligne de glissement probable.

En conclusion, la méthode des éléments finis est un complément utile des méthodes d'équilibre limite; elle apporte des informations sur le développement de la rupture. La méthode des éléments finis peut être utilisée selon les deux méthodes décrites plus haut pour déterminer un coefficient de sécurité, mais cet usage ne sera probablement pas justifié en général. La première méthode — méthode directe — est coûteuse en temps de calcul et exigeante sur les qualités du logiciel. La seconde méthode — équilibre limite *amélioré* — est coûteuse en temps d'ingénieur et, dans certains cas, elle peut n'apporter aucun complément de précision par rapport aux meilleures des méthodes classiques d'équilibre limite.

close to unity. Not only are several non-linear analyses needed but each is likely to cost at least three times as much as a non-linear analysis of the same problem with the strength unreduced ( $\alpha = 1$ ). This in turn is likely to be an order of magnitude more expensive than a linear elastic analysis. A cost some two orders of magnitude higher than that of a linear analysis must therefore be expected.

An alternative is to use the finite element method in conjunction with limit equilibrium analysis. The work of Wright *et al.*, described in §.2.2. above, is an example of this. The finite element method can provide information about local yield and can determine the normal stresses on an assumed slip surface. The important point is that the finite element analysis is carried out for the working condition, *i.e.* without reducing the strength. Thus there are considerable savings in computing cost. Indeed provided the safety factor is quite large, so that there is little local yield, a linear elastic analysis can give useful results. Naylor (1982a) called this the *enhanced limit method*. On checking it out for a vertical slope in a cohesive material having a safety factor of 1.60, based on a  $45^\circ$  plane slip surface, he obtained values of 1.64 and 1.65 for a non-linear (Tresca) and linear elastic analysis respectively. Fig.2.7. (from the same paper) shows the finite element computed shear stress ( $\tau$ ) and shear strength ( $\tau_f$ ) computed for a circular slip surface.  $\tau$  approximates  $\tau_f$  near the toe indicating local yield here. The computed safety factor was 2.24 (the ratio of the areas under the two curves). This was significantly higher than a value of 1.92 obtained independently using a linear programming method. This suggests that a circular surface was not appropriate here and illustrates the point made earlier that the assumption of an incorrect slip surface shape will overestimate the Factor of Safety. The computing savings with the enhanced limit method are somewhat offset by the labour required to extract the stress distribution along the slip surface from the finite element analysis.

The use of the finite element method to obtain a better understanding of the mechanisms involved as a collapse state is approached is illustrated in the studies by Naylor (1982b) of the Empingham trial bank (a test embankment subsequently incorporated in the section of the Empingham dam in Eastern England). This unusual dam was built of stiff Lias clay and was founded on the same clay. The 15 m high trial bank was constructed to verify that the foundation strength parameters (in terms of total stress) were adequate. If they were not the bank would have collapsed, which it did not. Naylor took advantage of this case history to study the effect of the relative stiffness assumed for the fill and the foundation on the development of yield. Although this could not affect the **ultimate** safety factor the study demonstrated that the full development of yield in the foundation (which was the main concern) was quite sensitive to the elastic properties assumed for the fill. Thus a relatively soft fill (low Young's modulus) with a high Poisson's ratio induced shear failure in the foundation much earlier than either the assumption of a lower Poisson's ratio or a stiffer fill. Fig.2.8a shows the development of yield in the foundation for the high Poisson's ratio low fill stiffness case. (OSR in this figure is the *Over-Stress-Ratio* a local safety factor inverse). Fig.2.8b shows a computer plot of potential slip directions (lines in this case at  $45^\circ$  to the principal stress direction since  $\phi = 0$ ) through which a likely slip surface has been sketched.

In conclusion, the finite element method can usefully complement limit analyses by providing information about the development of failure. It can be used in either of two ways to determine a safety factor but this will probably not normally be justified. The first — the direct method — is expensive in computing and demanding in the requirements made of the program. The enhanced limit method is expensive in man time, and in any case the accuracy may not be better than that obtainable from the more sophisticated of the limit equilibrium methods.

## REFERENCES

- BISHOP, A. W., 1955. *The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes*, Geotechnique, 5, No1, pp.7-17.
- DAVIS, E. H. and BOOKER, J. R., 1973. *The Effect of Increasing Strength With Depth on the Bearing Capacity of Clay*, Geotechnique, 23, No4, pp.557-563.
- FELLENIUS, W., 1939. *Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohasion und unter Annahine Kreiszyllindrischer Gleitflächen*, W.Ernst, Berlin.
- FREDLUND, D. G. and KRAHN, J., 1977. *Comparison of Slope Stability Methods of Analysis*, Canadian Geotechnical Journal, 14, No3, pp.429-439.
- GRIFFITHS, D. V., 1982. *Computation of Bearing Capacity Factors Using Finite Elements*, Geotechnique, 32, No3, pp.195-202.
- JANBU, N., 1973. *Slope Stability Compensation*, in Embankment Dam Engineering, Wiley, New York.
- LITTLE, A. L. and PRICE, V. E., 1958. *The Use of an Electronic Computer for Slope Stability Analysis*, Geotechnique, 15, No1, pp.79-93.
- MORGENSTERN, N. R. and PRICE, V. E., 1965. *The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces*, Geotechnique, 15, No1, pp.79-93.
- MORGENSTERN, N. R. and SANGREY, D. A., 1978. *Methods of Stability Analysis*, in Landslides, Analysis and Control, Special Report 176, Transportation Research Board, National Academy of Sciences, Washington D. C.
- NAYLOR, D. J., 1982a. *Finite Elements and Slope Stability*, Numerical Methods in Geomechanics, Ed. Martins, J. B., Reidel, pp.229-244.
- NAYLOR, D. J., 1982b. *The Effect of the Fill Stiffness*, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics (Edmonton, Canada, May 31-June 4, 1982), pp.735-739.
- SHARMA, S. K., 1979. *Stability Analysis of Embankments and Slopes*, J. Geot. Engng. Div., ASCE, 105, NoGT12, pp.1511-1524.
- SKEMPTON, A. W. and COATES, D. J., 1985. *Carsington Dam Failure*, Failures in Earthworks, Thos. Telford, London, pp.203-220.
- SPENCER, E., 1967. *A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Interslice Forces*, Geotechnique, 17, No1, pp.11-26.
- TAYLOR, D. W., 1948. *Fundamentals of Soil Mechanics*, Wiley, New York.
- WRIGHT, S. G., 1969. *A Study of Slope Stability and the Undrained Shear Strength of Clay Shales*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- WRIGHT, S. G., KULHAWY, F. H. and DUNCAN, J. M., 1973. *Accuracy of Equilibrium Slope Stability Analysis*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 99, NoSM10, pp.783-791.
- ZIENKIEWICZ, O. C., HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W., 1975. *Associated and Non-Associated Visco-Plasticity and Plasticity in Soil Mechanics*, Geotechnique, 25, No4, pp.671-689.





---

## 3. MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCRÉTISATION DE LA GÉOMÉTRIE

---

### 3.1. INTRODUCTION

Pour effectuer un calcul par éléments finis d'un barrage en remblai, il est nécessaire de modéliser la géométrie, le scénario de construction et les propriétés des matériaux. Dans ce chapitre, on examine le premier de ces points: les autres le seront dans les chapitres 4, 5 et 6. (Les détails sur les étapes d'un calcul sont donnés à la fin du chapitre 4).

Dans la mise au point d'un maillage d'éléments finis, les sources d'erreurs sont de deux sortes:

- (1) celles qui sont dues aux approximations géométriques des limites, tant externes qu'internes (entre zones);
- (2) celles dues aux limitations des formes de déformées que les éléments choisis peuvent reproduire.

Ces deux sources d'erreurs peuvent être rendues négligeables par l'utilisation d'éléments assez petits, mais cette solution n'est pas toujours viable économiquement, en particulier si on doit faire un calcul incrémental non-linéaire. Pour les géométries simples, et en particulier quand la vallée est assez large pour qu'un calcul bidimensionnel en déformation plane soit une bonne approximation, les erreurs du premier type ne sont pas significatives. Celles du second type peuvent être réduites en choisissant des éléments adéquats ou en réduisant leur taille. Il est souvent nettement plus économique d'utiliser un petit nombre d'éléments mais en choisissant un type relativement perfectionné. Cependant, ceci peut entraîner des difficultés dans la description des limites, où des éléments plus petits peuvent être indispensables. Il est souvent nécessaire de trouver un compromis.

Dans la plupart des cas dans notre contexte, les éléments isoparamétriques quadratiques apportent ce compromis. Pour les calculs en bidimensionnel, les programmes comportant des quadrangles à 8 noeuds et des triangles à 6 noeuds sont particulièrement adaptés car la combinaison de ces deux types d'éléments permet de mailler facilement les formes des barrages en remblai. L'élément tridimensionnel quadratique correspondant au quadrangle est la *brique* à 20 noeuds (hexaèdre). Un programme idéal comprendrait en outre des prismes à 15 noeuds et des tétraèdres à 10 noeuds, connectables aux briques. (On pourrait bien sûr remplacer les tétraèdres et les prismes par des briques déformées, mais cette solution est lourde).

Beaucoup d'autres types d'éléments offrent des avantages dans des situations particulières. Cependant Zienkiewicz (1978) écrit à propos de développements de nouveaux types d'éléments: « Aucun de ces développements n'a apporté d'amélioration spectaculaire des performances générales ». Il décrit ensuite certaines des situations dans lesquelles on peut utiliser des éléments spéciaux.

Dans le cas des barrages construits dans des vallées aux versants assez raides, la principale source d'imprécision dans la modélisation de la géométrie est l'erreur associée à l'utilisation d'un modèle bidimensionnel en déformation plane. Ceci a fait l'objet de nombreuses études qu'on examine dans le paragraphe suivant.

---

## 3. FINITE ELEMENT MODELLING IDEALISATION OF GEOMETRY

---

### 3.1. INTRODUCTION

To perform a finite element analysis of an embankment dam it is necessary to model the geometry, construction sequence and material properties. In this chapter the first of these is considered, the rest being covered in chapters 4, 5 and 6. (Details of the steps involved in carrying out an analysis are provided at the end of chapter 4).

In setting up a finite element mesh to discretise the geometry sources of error can be put in two categories:

- (1) those due to the approximations involved in representing the boundaries, both the external boundaries and the internal boundaries between the different zones;
- (2) those due to the limitations of the deformation modes which the elements can reproduce.

Both these sources of error can be made negligible by making the elements small enough but it will not always be economically feasible to do this (particularly when non-linear sequential analyses are involved). For simple geometries, especially when the valley is wide so that a 2D plane strain analysis is a good approximation, the first error category is not significant. The second can be reduced by the choice of element type as well as by reducing their size. It will often be more cost effective to use fewer relatively sophisticated elements. This, however, may lead to problems in modelling the boundaries where fairly small elements might be needed. A compromise is often necessary.

For most purposes in the present context quadratic *isoparametric* elements provide this compromise. For 2D analysis, programs which allow 8 noded quadrilaterals and 6 noded triangles to be combined in a mesh are particularly convenient since these shapes facilitate the modelling of the sloping sides of embankment dams. The 3D quadratic element corresponding to the quadrilateral is the 20 noded *brick*. An ideal program would have 15 noded wedge and 10 noded tetrahedral quadratic elements available for connecting to the bricks. (Brick elements can be distorted into wedges and tetrahedra but this is cumbersome).

There are a number of other element types which offer advantages in special situations. Zienkiewicz (1978), referring to recent developments in element types, writes: « None of these developments have however produced a dramatic improvement of general performance ». He then goes on to describe some of the situations in which certain special purpose elements may be used.

For dams across relatively steep sided valleys, the main source of uncertainty in the geometric idealisation is the error associated with the use of a 2D plane strain analysis. A number of studies of this have been made and these are now described.

### 3.2. MODÈLE BIDIMENSIONNEL ET MODÈLE TRIDIMENSIONNEL

Sauf s'il a la forme d'un remblai assez long, construit sur une fondation bien homogène, un barrage en terre est une structure tridimensionnelle. Cependant, la plupart des calculs effectués à ce jour l'ont été en utilisant la simplification bidimensionnelle (2D), dans des conditions de déformation plane. Le développement des éléments isoparamétriques par Clough (1969) et Zienkiewicz et al. (1969) a donné la possibilité d'effectuer des calculs tridimensionnels (3D) pour des cas réels. De nombreuses versions de programmes d'éléments finis tridimensionnels existent, mais dans leurs applications pratiques les différences sont très importantes par rapport aux calculs en bidimensionnel. Cette différence est d'un facteur 10 en ce qui concerne le coût de calcul et le volume des données. La question est donc de savoir dans quelles situations un modèle bidimensionnel est suffisant et dans quelles situations il ne l'est pas.

Eisenstein et al. (1972a) ont étudié un modèle tridimensionnel d'un barrage, à parements à 2 pour 1, dans une vallée en V dont les versants ont une pente de 1 pour 1. Les résultats furent comparés à ceux du calcul bidimensionnel correspondant, en déformation plane. Pour un barrage complètement homogène (c'est-à-dire sans noyau), les résultats du calcul 2D d'une coupe longitudinale (rive droite-rive gauche) n'ont été que peu différents de ceux du 3D: on observe en 2D une légère surestimation des contraintes et des déformations. Lefebvre et al. (1973) ont obtenu des résultats semblables et ont étudié, de plus, une coupe transversale d'un barrage homogène. Dans ce cas, les deux types de calcul sont en bon accord pour des pentes des versants de 1 pour 3, ou plus plates. Pour des vallées à versants plus raides, le calcul bidimensionnel d'une section transversale était moins précis en raison de l'effet de voûte d'une rive à l'autre. Les résultats de ces deux modélisations géométriques sont aussi différents si le remblai comporte deux ou plusieurs matériaux, ce qui est souvent le cas en pratique. Eisenstein et al. (*op.cit.*) ont inclus dans leur modèle un noyau central (Fig. 3.1.). Les contraintes horizontales le long de la crête (avec et sans noyau) sont illustrées par la Fig. 3.2. Dans ces calculs, la construction a été modélisée en cinq étapes. Les résultats présentent une différence évidente, particulièrement dans des zones où le problème de fracturation est crucial.

L'analyse de la fracturation du barrage Duncan (Eisenstein et al., 1972b) a permis de mieux démontrer la nécessité des modèles tridimensionnels pour certaines structures. Le barrage a été construit sur une fondation extrêmement compressible, et on observa un tassement dissymétrique. La Fig. 3.3. donne la vue en plan du barrage Duncan ainsi que le profil longitudinal des tassements. Dans le corps du barrage, de fortes elongations, causées par le tassement de la fondation, produisirent des séries de fissures amont-aval près de l'appui rive gauche. Les tassements mesurés furent utilisés dans le calcul tridimensionnel par éléments finis comme des conditions aux limites en déplacements imposés, pour différentes étapes de la construction du remblai. On obtint ainsi un champ de contraintes dans le barrage, en fonction du temps, de l'espace et de la construction du remblai. Sur la Fig. 3.4., on observe les fissures dans la zone critique, pour deux étapes de la construction, ainsi que les contraintes principales mineures sur quatre verticales de cette zone. En supposant que le critère de fracturation est l'apparition d'une contrainte de traction, la concordance entre le calcul et l'observation est bonne. Des calculs de ce type seraient impossibles en bidimensionnel.

Dans leur étude du barrage Mica, Eisenstein et Simmons (1975) ont comparé des calculs 3D et 2D. Ce barrage en terre, de 800 pieds (244 m) de haut, est situé dans une gorge étroite et a la forme d'un tétraèdre blais. La Fig. 3.5. en montre la vue en plan et la coupe-type. Les comparaisons entre les calculs 3D et 2D ont porté sur la coupe-type. Sur la Fig. 3.6., on peut voir la comparaison des déformations calculées avec les tassements observés *in situ*: la cohérence entre calculs et réalité est bonne, et il est intéressant d'insister sur les faibles différences entre les calculs 2D et 3D. On observe la même concordance entre 2D et 3D pour les contraintes principales majeures (Fig. 3.7.). Ceci est particulièrement intéressant dans la mesure

### 3.2. 2D v. 3D

An earth dam, unless it has the form of a rather long embankment built on fairly uniform foundations, is a three-dimensional structure. However, most analyses performed so far used a two-dimensional simplification based on the condition of plane strain. The development of isoparametric elements by Clough (1969) and Zienkiewicz *et al.* (1969) created the possibility of performing three-dimensional analyses of practical problems. Finite element computer programs for three-dimensional analyses were indeed developed in several versions, but there is still a considerable difference in their practical application when compared with two-dimensional analyses. The difference is approximately one order of magnitude in terms of both computer expense and data handling. The question then is in what situations is the two-dimensional model acceptable and in which is it not.

Eisenstein *et al.* (1972a) studied a three-dimensional model of a dam with 1:2 slopes in a V-shaped valley with 1:1 abutments. The results were compared with a corresponding two-dimensional plane strain analysis. For a completely homogeneous embankment (*i.e.* without a core) the 2D analysis of a longitudinal section only slightly overestimated stresses and deformations calculated with the 3D program. Similar results were reported by Lefebvre *et al.* (1973), who, in addition, studied the transverse section of a homogeneous dam. Here, the two types of analysis agreed well for abutments inclined 3:1 or flatter. For steeper valleys the two-dimensional analysis of a transverse section was less accurate due to the effect of cross-valley arching. The results of these two types of geometrical abstractions also differ if the embankment comprises two or more different materials, as is often the case in practice. Eisenstein *et al.* (*op.cit.*) incorporated into their model a centrally located core, as shown on Fig. 3.1. The horizontal stresses along the crest with and without the core are shown on Fig. 3.2. In these analyses construction was modelled in five lifts. A significant difference in results is apparent, particularly in areas which are critical with respect to cracking.

The need for using a three-dimensional model in certain structures was further demonstrated in the analysis of cracking at Duncan Dam (Eisenstein *et al.*, 1972b). The dam was built on an extremely compressible foundation. The subsequent settlement developed asymmetrically. The plan of Duncan Dam with longitudinal settlement profile is shown on Fig. 3.3. High tensile strains within the dam, caused by foundation settlement, resulted in a series of longitudinal cracks near the left abutment. The measured settlement was used in a 3D finite element analysis as a known boundary displacement at various time stages corresponding to the filling of the embankment. A stress field in the dam was thus obtained as a function of time, filling and space. Fig. 3.4. shows the development of cracks in the critical area documented at two time stages together with stress analysis results plotted in terms of minimum principal stress along four vertical lines within the same area. Assuming the appearance of tensile stress as a criterion for cracking, the correspondence between the analysis and field observations is good. Analysis of this kind would not be possible using a two-dimensional simplification.

Comparisons between 3D and 2D analyses were performed by Eisenstein and Simmons (1975) in their study of the behaviour of Mica Dam. This 800 ft. (244 m) high earth dam is situated across a narrow gorge and has an overall form of a skewed tetrahedron. The main transverse section and plan of Mica Dam are shown on Fig. 3.5. The two and three-dimensional comparative studies were concentrated on the main transverse section. The results of the deformation analysis are compared with field settlement data on Fig. 3.6. While the agreement between the calculations and field behaviour is good the interesting point here is the remarkably small difference between two and three-dimensional analyses. Similarly small differences were found in

où le barrage Mica a une géométrie vraiment tridimensionnelle et où les chercheurs avaient montré que les effets 3D sur la distribution des contraintes étaient assez importants (Palmeron et Lefebvre, 1972); Lefebvre et al. (*op.cit.*). Les calculs de Eisenstein et Simmons (*op.cit.*) prouvent que, même si des effets 3D existent, la modélisation 2D de la coupe-type est satisfaisante, au moins dans la pratique, en ce qui concerne le schéma général de déformations et le champ de contraintes. On peut trouver un autre argument en faveur de cette conclusion en comparant les ordres de grandeurs de déformations dans le plan du modèle et dans la direction normale à ce plan. Dans le cas de la coupe-type du barrage Mica, ces deux types de déformations sont dans un rapport de 10. Cependant, on doit insister sur le fait que ces résultats ne s'appliquent qu'à la coupe-type et que, dans le reste du corps du barrage, les différences entre calculs 2D et 3D s'accroissent. De plus, il ne serait pas raisonnable d'étendre à tous les barrages la bonne cohérence observée dans le cas du barrage Mica. On dispose actuellement de très peu de données pour pouvoir conclure définitivement sur l'effet des répartitions de matériaux et des variations de géométrie dans l'hypothèse 2D.

Les études présentées ci-dessus montrent que les modèles bidimensionnels en déformation plane peuvent donner des résultats relativement cohérents avec la réalité, dans la mesure où le mode de déformation de la section calculée est quasi-bidimensionnel. Ceci ne s'applique pas aux coupes rive droite-rive gauche, dont le comportement n'est pas bidimensionnel, en particulier en cas de fissuration, qui se produit généralement près des appuis et fait intervenir des déformations en travers de la vallée. Dans ce cas, il serait nécessaire d'effectuer un calcul 3D. Cependant, des informations utiles sur l'effet 3D peuvent être tirées du jumelage de calculs 2D de contraintes dans un profil rive droite-rive gauche sur l'axe du barrage, avec épaisseur amont-aval variant verticalement et horizontalement, et de calculs 2D dans un profil en travers amont-aval.

## REFERENCES

- CLOUGH, R.W., 1969. *Comparison of Three Dimensional Finite Elements*, Proc. of Symposium on Application of Finite Element Method in Civil Engrg., ASCE, Nashville, Tenn., pp.1-26.
- EISENSTEIN, Z. and SIMMONS, J.V., 1975. *Three-Dimensional Analysis of Mica Dam*, Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, Proc. of Int. Symp. at Univ. of Wales, Swansea, Sept. 1975, pp.1052-1069.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and MORGENSTERN, N.R., 1972a. *An Analysis of Cracking in Earth Dams*, Proc. of Symposium on Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engrg., USAEWES, Vicksburg, Miss., pp.431-545.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and MORGENSTERN, N.R., 1972b. *An Analysis of Cracking at Duncan Dam*, Proc. of ASCE Spc. Conf. on Performance of Earth and Earth-supported Structures, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, Vo.1, pp.765-777.
- LEFEBVRE, G., DUNCAN, J.M. and WILSON, E.L., 1973. *Three-Dimensional Finite Element Analysis of Dams*, J. Soil Mech., Fdn. Eng. Div., ASCE, 99, n°SM7, pp.495-507

stress results as demonstrated by major principal stress contours on Fig.3.7. This is interesting as Mica Dam is admittedly a 3D structure and theoretical work of previous investigators (Palmerton and Lefebvre, 1972; Lefebvre *et al.*, *op.cit.*) has shown that 3D effects may have a rather important affect on the stress distribution. The analyses by Eisenstein and Simmons (*op.cit.*) imply that although 3D effects certainly are present, the governing deformational behaviour and stress distribution in the main transverse section can be represented satisfactorily, at least for practical purposes, using a 2D plane strain analysis. Another argument to support such a conclusion can be found by comparing the relative magnitudes of strains within and perpendicular to the analysed plane. In the case of the main transverse section of Mica Dam, the difference between the two categories of strains was found to be of an order of magnitude. It should be emphasised, however, that such finding apply only to the main transverse section and that for the rest of the body of the dam the disagreement between 2D and 3D analyses would be more pronounced. Furthermore it would be unwise to assume that the relatively good agreement obtained for Mica Dam applies generally. Little data are available as yet to assess the effect of variations of material distribution and geometry on the 2D assumption.

The studies presented have shown that two-dimensional plane strain models are capable of providing results which are in reasonable agreement with reality providing the deformation mode of the investigated section is dominantly two-dimensional. This does not apply to cross valley deformations where a marked departure from such a condition occurs, particularly if there is cracking. This is usually close to the abutments and involves cross-valley strains. A 3D analysis should be used here. A 2D plane stress cross-valley analysis on the dam axis with the out-of-plane (*i.e.* upstream-downstream) thickness varying vertically and horizontally in conjunction with a 2D cross section analysis may, however, be useful in giving some indication of the 3D effect.

PALMERTON, J.B. and LEFEBVRE, G., 1972. *Three-Dimensional Behaviour of a Central Core Dam*, USAEWES, Research Report S-72-1, Vicksburg, Miss.

ZIENKIEWICZ, O.C., IRONS, B.M., ERGATOUDIS, J., AHMAD, S. and SCOTT, F.C., 1969. *Isoparametric and Associated Element Families for Two and Three-Dimensional Analysis*, Proc. Course on Finite Element Methods in Stress Analysis, Ed. by I. Holland and R. Bell, Technical Univ., Trondheim.

ZIENKIEWICZ, O.C., 1978. *Finite Element Methods in Analysis and Design of Dams*, ICOLD, Bulletin 30.

---

## 4. CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS CONSTRUCTION ET EXPLOITATION DU BARRAGE

---

### 4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est exclusivement consacré à la méthode des éléments finis qui est la seule méthode utilisée couramment pour l'étude détaillée des contraintes et des déformations des barrages en remblai, pendant leur construction et leur exploitation.

Les principales étapes des calculs de barrages en terre sont la construction, la mise en eau, le régime permanent et la vidange. Des conditions critiques de stabilité de l'ouvrage peuvent survenir durant chacune de ces étapes. Le but principal de ces calculs est de fournir des informations sur les champs de contraintes et de pressions interstitielles, qu'on utilisera dans l'évaluation de la stabilité. Un aspect important de ceci est l'évaluation des interactions entre zones et la détection des régions où la fracturation hydraulique est possible. Un but secondaire est la prédiction des déformations. Cependant, les calculs de déplacements sont importants car on peut alors comparer les déplacements calculés à ceux mesurés *in situ* et ajuster ainsi les valeurs des paramètres mécaniques. Un modèle ainsi calé (soit à l'aide d'un barrage semblable plus ancien, soit à l'aide des mesures effectuées au cours de la construction) peut être utilisé pour donner de meilleures prévisions des contraintes.

Un problème majeur est la complexité de l'histoire des contraintes. Ceci est illustré par la Fig. 4.1. qui montre l'évolution de la pression interstitielle au milieu d'un barrage à noyau central. On observe, de façon qualitative, la sensibilité du problème aux hypothèses de drainage du noyau. Les points A et B représentent les estimations des pressions interstitielles respectivement au début de la mise en eau et au début de la vidange. La ligne continue représente l'évolution réelle de la pression interstitielle. Les contraintes effectives sont particulièrement importantes puisque c'est d'elles que dépendent à la fois la résistance au cisaillement et la fracturation hydraulique du noyau. Les contraintes totales ne dépendent pas des hypothèses du calcul, dans la mesure où les imprécisions illustrées par la Fig. 4.1. ne font que refléter les variations individuelles des contraintes effectives et de la pression interstitielle, dont la somme reste égale à la contrainte totale.

Ce chapitre se termine par le paragraphe 4.7. dans lequel on examine en détail les étapes d'un calcul par éléments finis d'un barrage. Son but est de relier entre elles les méthodes décrites dans les chapitres précédents et les exigences particulières du calcul par éléments finis d'un barrage donné.

### 4.2. CALCUL EN CONTRAINTE EFFECTIVE OU EN CONTRAINTE TOTALE

Une question importante est de savoir si les calculs doivent être effectués en termes de contraintes totales ou de contraintes effectives. Dans le premier cas, les paramètres mécaniques des matériaux doivent lier les déformations aux variations de contraintes totales, alors que dans le second cas ils doivent lier les déformations aux variations de contraintes effectives (c'est-à-dire qu'on doit spécifier la raideur du squelette du sol). Dans le cas d'un chargement parfaitement drainé, les deux ensembles de paramètres deviennent identiques (à l'approximation près qu'on néglige les variations de raideur avec le temps) et la seule différence entre un calcul en contraintes totales et un calcul en contraintes effectives est que, dans le second cas, on exprime séparément la pression interstitielle. Elle est donc une constante, qui ne joue aucun rôle dans le calcul. Dans les cas non-drainés, les surpressions

---

## 4. FINITE ELEMENT MODELLING CONSTRUCTION AND OPERATION

---

### 4.1. INTRODUCTION

This chapter is exclusively concerned with the finite element method as it is the only method currently used for the detailed study of deformations and stresses during the construction and subsequent operation of fill dams.

The principal stages in earth dam analyses are construction, reservoir filling, steady seepage and drawdown. Critical conditions regarding the stability of the dam may occur in any of these stages. The main purpose of the analyses will be to provide information about the distribution of stresses and pore pressures which can be used in the assessment of stability. An important aspect of this is the assessment of interaction between zones and the detection of areas of potential cracking which could lead to hydraulic fracture. A secondary purpose is the prediction of deformations. The computations of displacement are, however, important in that they can be compared with measured values and by means of back analysis used to obtain more meaningful stiffness parameters. An analysis thus calibrated (from a previous but similar dam, or during the construction phase of the dam being analysed) can be used to make better stress predictions.

A major problem is the complication of the stress history. Fig. 4.1. illustrates this by tracing the pore pressure history of a point in the middle of a central core dam. The figure demonstrates in a qualitative way how sensitive the pore pressure is to the extreme assumptions of no drainage in the core during the three stages and complete drainage. The points A and B represent the best estimate (obtained by means unspecified) of the pore pressure at the start of reservoir filling and drawdown respectively. The full line illustrates what might actually happen. The effective stress state is of particular interest since both the shear strength and the resistance of the core to hydraulic fracture will depend on the mean effective stress. Total stresses will not be dependent on the assumptions of the analyses to the extent that the pore pressure will be, consequently the effective stress, being the difference of the total stress and pore pressure, will reflect the uncertainties illustrated in Fig. 4.1.

This chapter ends with a section (4.7.) in which the steps involved in a typical finite element of a dam are spelt out in some details. It aims at providing a bridge between the methods described in the preceding sections and the specific requirements for the finite element analysis of a particular dam.

### 4.2. EFFECTIVE OR TOTAL STRESS ANALYSIS

An important issue is whether analyses should be in terms of total or effective stress. In the former case, the material stiffness parameters must relate strains to changes in total stress whereas in the latter they must relate strains to effective stress changes (*i.e.* the stiffness of the soil skeleton must be specified). For fully drained loading the two sets of parameters become the same (at least to an approximation which ignores stiffness changes with time), and the only difference between a total and effective stress analysis is that the latter will separate out the pore pressure. It



interstitielles, dues au chargement, peuvent être calculées explicitement dans un calcul en contraintes effectives, et ajoutées aux pressions interstitielles initiales. Une autre possibilité est d'effectuer le calcul en contraintes totales et de déterminer les surpressions interstitielles par des fonctions empiriques de la variation de contrainte totale. La meilleure façon de déterminer ces surpressions est probablement celle de Skempton (1954), avec ses deux coefficients « A » et « B ».

Dans certains cas, on peut traiter la construction, la mise en eau, le régime permanent et la vidange rapide en non-drainé dans le noyau et (généralement) en drainé dans les recharges; ainsi les deux approches (contraintes totales ou effectives) peuvent être suivies. Cependant, si on veut une analyse de la consolidation, il est indispensable de travailler en contraintes effectives, et on a besoin de définir les caractéristiques mécaniques du squelette du sol. Une autre situation dans laquelle il est nécessaire de travailler en contraintes effectives est le calcul de la réponse à une variation connue de la pression interstitielle; par exemple, pour un calcul de fin de construction, de service normal ou de consolidation (voir §. 4. 5.).

Ces considérations montrent que les méthodes de contraintes effectives jouent un rôle important dans le calcul des barrages en remblai. Ceci donne un argument en faveur de l'extension de l'usage de ces méthodes et plaide pour l'unification des traitements. Cependant, un argument contraire vient du manque relatif d'expérience de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour les calculs non-drainés en contraintes effectives. On a besoin d'une base empirique pour utiliser ces méthodes avec succès.

Il est simple de modifier un programme d'éléments finis pour pouvoir l'utiliser aussi bien en contraintes totales qu'effectives (Naylor, 1974; Naylor et al., 1981). L'hypothèse de base est que, en non-drainé, les déformations du fluide interstitiel (traité comme un milieu continu partageant le même espace physique avec le squelette du sol) sont les mêmes que les déformations du squelette du sol. Ceci permet d'exprimer les contraintes totales en fonction de la somme des raideurs du squelette et du fluide interstitiel. Le programme d'éléments finis considère les valeurs de ces composants sous la forme des raideurs du matériau du squelette et d'un module volumétrique équivalent pour la phase fluide ( $K_f$ ). Ce module est grand par rapport au module volumétrique du squelette dans le cas où le sol est saturé. Le programme combine ensuite ces modules pour constituer les matrices de raideur élémentaires. Puis le calcul suit la procédure classique, jusqu'au calcul des contraintes. Là, les paramètres de raideur du squelette et de la phase fluide sont utilisés séparément pour calculer les variations de contraintes effectives et les surpressions interstitielles. En fixant la valeur de  $K_f$  à zéro, on revient à un calcul classique. On peut donc avoir aussi bien un calcul non-drainé en contraintes totales qu'un calcul drainé.

La fixation d'une valeur convenable pour  $K_f$  est identique vis-à-vis du mode de détermination du paramètre B de Skempton. Comme indiqué ci-dessus, une valeur élevée (par exemple, 2000 MPa qui est la valeur approximative du module volumétrique de l'eau) convient pour un sol entièrement saturé où  $B=1$ . Les matériaux d'un barrage en remblai seront en partie saturés (à l'exclusion des matériaux secs des recharges) au moins près de la surface.  $K_f$  peut être évalué à partir d'une relation entre B et la raideur  $K'$  du squelette du sol (équation 6.7 du chapitre 6.3.). Il faut noter que  $K_f$  ne tient pas compte des effets de pression interstitielle dus au cisaillement, comme cela est mesuré par le paramètre A. De tels efforts peuvent en principe être modélisés dans une analyse en contraintes effectives en utilisant une loi appropriée contraintes-déformations (voir le chapitre 6.3. sur les modèles élasto-plastiques).

will be a constant which plays no part in the analysis. For undrained analysis the excess pore pressure due to the loading can be computed explicitly in an effective stress analysis and added on to any initial pore pressure. The alternative is to carry out a total stress analysis and then obtain the excess pore pressure as an empirical function of the total stress change. The best known way of doing this is probably by means of the « A » and « B » pore pressure parameters of Skempton (1954).

Construction, reservoir filling, seepage, and rapid drawdown can in certain cases be treated as being undrained in the core and (usually) fully drained in the shells so that either a total or an effective stress approach may be used. When, however, a consolidation analysis is required an effective stress approach must be used. The stiffness of the soil skeleton is required. Another situation in which analyses need to be in terms of effective stress is the *known-pore-pressure change* analysis in which the response to an assumed pore pressure change is calculated. This has application to post-construction analysis and can be used to complement seepage and consolidation analyses. It is explained in section 4.5. below.

These considerations show that effective stress methods play an important part in fill dam analysis and provide a case for using effective stress methods throughout. This makes for a unified treatment. Against this, however, is the relatively little experience which has yet accumulated of the use of the finite element method for undrained analysis in terms of effective stress. An empirical base is needed for all these methods if they are to be used successfully.

It is simple to convert a conventional finite element program for use in terms of either total or effective stress. Naylor (1974) or Naylor *et al.* (1981), has shown how this can be done. The basis is that for undrained conditions the strains in the pore fluid (treated as a continuum sharing the same physical space as the soil skeleton) are the same as the strains in the soil skeleton. This allows the total stress to be expressed as the sum of a skeleton stiffness and a pore fluid stiffness. The finite element program reads in the values of these components in the form of skeleton material stiffness values and a pore fluid equivalent bulk modulus ( $K_f$ ) (which is large compared with the soil skeleton bulk modulus if the soil is saturated), and combines them when working out the element stiffness matrices. The analysis then follows standard lines until the stresses are calculated. Here the separate skeleton and pore fluid stiffness parameters are used to compute respectively the effective stress change and excess pore pressure. Setting  $K_f$  to zero causes the analysis to revert to conventional form. It can then be used for an undrained total stress analysis or a drained analysis.

Determination of an appropriate value for  $K_f$  is similar to the judgement required as assigning the Skempton B parameter. As mentioned above a large value (e.g. 2000 MPa which is the approximate bulk modulus of water) is appropriate for a fully saturated soil for which  $B = 1$ . Dam fill material will invariably be partly saturated (excluding dry shoulder material), at least near the surface.  $K_f$  can then be estimated by a relationship with B and the stiffness of the soil skeleton  $K'$  (equation 6.7, section 6.3.). Note that  $K_f$  does not of itself take into account pore pressure effects due to shear, *i.e.* as measured by the A parameter. Such dilatancy effects can in principle be modelled in an effective stress analysis by using an appropriate stress-strain law. (See the section on elasto-plastic models in 6.3. below).

### 4.3. CONSTRUCTION

Au cours de la construction d'un barrage en remblai, on met en place et on compacte un grand nombre de couches de matériau, d'environ 0,20 à 1 mètre d'épaisseur. Il est clair qu'il est pratiquement impossible de représenter toutes ces couches dans un modèle éléments finis. On se limite à un ensemble de 1 à 10 couches (ou plus). Chaque couche mise en place fait l'objet d'un calcul séparé, dont les résultats sont transmis au calcul suivant.

C'est Goodman (1963) qui insista le premier sur la nécessité de modéliser la construction couche par couche. Dans leur article classique (1967), Clough et Woodward ont introduit ce mode de construction dans le calcul par éléments finis des barrages en remblai. Ils ont comparé deux calculs d'un barrage homogène sur une fondation rigide: l'un en une seule couche et l'autre en plusieurs couches. Les résultats montrèrent peu de différences dans les contraintes mais des différences sensibles pour les déplacements verticaux (Fig. 4.2.).

Il est nécessaire de définir précisément ce qu'on entend par *déplacement* lors de la construction d'un barrage, si l'on veut éviter des confusions dans l'interprétation des résultats. Une définition du déplacement est: le mouvement d'un marqueur, placé à la surface du remblai au moment où le remblai atteint le niveau du marqueur. Comme, dans la réalité, l'épaisseur des couches est faible devant la hauteur du barrage, on peut considérer que la construction est un processus continu. On doit donc choisir avec soin l'origine des déplacements dans un calcul couche par couche. On doit considérer que les déplacements de la base d'une couche nouvellement posée sont nuls *avant* application de la pesanteur (ou bien que ce sont ceux du sommet de la couche qui sont nuls *après* application de la pesanteur). On peut s'attendre à des erreurs si on choisit, comme origine des déplacements, des points situés ailleurs qu'à des limites inter-couches. En effet, pour de tels points, l'état initial des déplacements n'est pas clairement défini. Si la construction est effectuée en une seule couche, le calcul ne donnera aucun déplacement significatif, sauf à la base du barrage, si la fondation est compressible. Ceci apparaît dans la Fig. 4.2., d'après Clough et Woodward (*op. cit.*), où l'on voit les déplacements verticaux dans un calcul de construction monocouche. On constate que ceux-ci croissent de zéro à la base à 2 pieds en crête. Au contraire, les résultats significatifs du calcul à 10 couches montrent des déplacements nuls à la base et en crête avec un maximum à peine supérieur à 0,8 pied vers le centre du barrage. Le calcul monocouche simule en fait la construction du barrage dans le cas où la pesanteur n'existe pas: comme si on construisait le barrage dans l'espace interplanétaire et qu'on le descendait sur terre. Ceci représente aussi, au moins approximativement, un essai d'un modèle réduit du barrage dans une centrifugeuse.

Il est assez coûteux d'effectuer un calcul couche par couche et il est donc important de déterminer le nombre minimal de couches à représenter pour obtenir des résultats corrects. Selon ce qui précède, il est probable qu'on a besoin de plus de couches pour obtenir des déplacements corrects que pour obtenir des contraintes correctes (en remarquant toutefois qu'on doit prendre des précautions avant de généraliser les résultats de Clough et Woodward aux barrages significativement hétérogènes). Kulhawy et al. (1969) ont étudié ce problème dans le cas d'une colonne de matériau élastique linéaire, construite progressivement et soumise à des déformations verticales. Les résultats furent que, pourvu que la raideur de chaque nouvelle couche soit nettement inférieure à celle des couches précédentes(\*), le nombre minimal de

---

(\*) Ceci est justifié physiquement par le fait que la nouvelle couche est constituée de matériau non-compacté. De plus, dans les calculs 2D et 3D, cette diminution de raideur de la couche nouvellement posée est nécessaire pour réduire sa rigidité en flexion. En effet, sans cette modification, la rigidité en flexion de la nouvelle couche placée dans le modèle serait bien plus forte que celle de l'ensemble des couches réelles représentées, dont l'épaisseur totale est la même mais qui sont, chacune, plus minces que la couche modélisée.

### 4.3. CONSTRUCTION

A large number of compacted layers, typically in the range 0.20 to 1.0 metres thick, are placed in the construction of a fill dam. When this is modelled by finite elements it is clearly not practical to use as many layers as are actually used. A limited number ranging from one (a single lift analysis) to ten or more, each involving a separate analysis with information transferred from one to the next, is required.

The necessity for modelling construction in successive layers was first recognised by Goodman (1963). Clough and Woodward (1967), in their classic paper, introduced it into the finite element analysis of fill dams. They compared single and multiple lift analysis of a homogeneous dam on a rigid base and found that there was little difference in stresses but that the vertical displacements were quite different (Fig. 4.2.).

It is necessary to define precisely what is meant by *displacement* during the construction of a dam otherwise confusion can arise in interpretation of analyses. It is the movement of a marker placed on the surface of the fill after the fill reaches the level of the marker. Since in reality the thickness of layers is small compared with the dam height, construction approximates closely a continuously rising fill. Care must therefore be taken in choosing the datum for displacement in a layered analysis. Zero displacement must be assigned to the base of a new layer **before** gravity is applied to it (or the top of the layer **after** gravity has been applied). Error will arise if the displacement of points other than on layer boundaries are used since the datum for such points is not clearly defined. If only one layer is used no meaningful displacement can be obtained from the analysis except at the base of the dam if the foundation is compressible. This is illustrated in the single lift vertical displacements of Clough and Woodward (*op.cit.*) shown in Fig. 4.2. These show a progressive increase from zero at the base to about 2.0 feet at the crest. The meaningful result from a ten lift analysis has zero displacement at base and crest with a peak of a little over 0.8 ft. near the centre of the dam. The single lift result simulates dam construction under weightless conditions, as if it were built in outer space and then brought down, to Earth. It would also apply, at least approximately, to a centrifuge model of the dam.

It is relatively costly to carry out layered analysis and it is clearly important to determine the minimum number of layers needed to provide acceptable results. From the foregoing it is likely that more layers will be needed to obtain acceptable displacements than the number needed for stresses (although caution should be exercised in extending Clough and Woodward's findings to dams which are significantly non-homogeneous). Kulhawy *et al.* (1969) studied this problem with respect to settlement in a progressively built-up column of linear elastic material constrained to deform vertically. He found that providing the stiffness of each new layer is appreciably reduced compared with the previously placed material(\*), the minimum number of analytical lifts needed was about eight. Naylor *et al.* (1984), however, show that for a one dimensional fill the number of computational layers is irrelevant

---

(\*) This is physically justified if the new lift is regarded as composed of uncompacted material. Also in two or three dimensional analysis a reduction in the stiffness in the new layer is needed to reduce its bending stiffness which would otherwise be higher than the effective combined bending stiffness of the thinner actual layers comprising the analytical layer.

couches à prendre en compte dans le calcul était de huit. Cependant, Naylor et al. (1984) ont montré que, pour un remblai unidimensionnel, le nombre de couches prises en compte dans le calcul n'était pas un paramètre important, pourvu que les contraintes sous la surface mobile du remblai soient correctement évaluées. Ces auteurs ont considéré deux méthodes pour modéliser la construction au-dessus d'un certain niveau intermédiaire. Le comportement du sol était supposé non-linéaire. Dans le premier cas (Fig. 4.3a.), on a simulé la construction du remblai par de nombreuses couches minces. Dans le second cas (Fig. 4.3b.), le reste du remblai a été placé en une seule couche, sur laquelle la pesanteur a été appliquée par un grand nombre d'incrémentes. Dans les deux cas, le chargement sous l'interface fut le même, ainsi donc que le déplacement. Bien que les deux méthodes demandent à peu près la même quantité de calculs, il est probable que la méthode monocouche soit bien plus pratique, surtout quand la structure du programme d'éléments finis utilisé permet d'appliquer des chargements en une série d'étapes ou d'incrémentes.

Naylor et al. (*op.cit.*) ont aussi étudié les effets bidimensionnels. Ils ont d'abord considéré un modèle comportant un noyau central compressible entre deux recharges rigides. Ceci fut choisi pour exagérer les erreurs dues à l'utilisation de trop peu de couches. L'étude porte sur des séquences de 3 à 12 couches. Des études ultérieures furent effectuées sur la coupe d'un vrai barrage à noyau central argileux. La conclusion fut que, dans la plupart des cas, cinq couches étaient suffisantes dans le modèle. En fait, les différences pour les champs de contraintes et de déplacements étaient très faibles entre des calculs avec 3 ou 4 couches et des calculs avec beaucoup de couches. Au contraire, Strohm et Eisenstein et al. (1972) ont montré qu'il fallait au moins 10 couches pour obtenir des déplacements et des contraintes qui ne variaient plus significativement pour une augmentation supplémentaire du nombre des couches. Leurs études insistent sur le rôle du nombre de couches dans la modélisation de la fissuration.

Il est évident que ce problème est l'objet de controverses. Deux types de résultats doivent être distingués. Le premier est l'interprétation correcte des calculs par éléments finis, particulièrement la nécessité de ne pas tenir compte des déplacements des nouvelles couches pendant leur chargement. Le second est l'influence du nombre de couches sur les caractéristiques du barrage et la question de savoir ce qui est intéressant dans ce barrage. Ainsi un calcul monocouche peut être tout à fait adéquat pour obtenir les contraintes verticales dans un barrage homogène posé sur une fondation rigide, alors que plusieurs couches (et un calcul tridimensionnel) sont nécessaires pour prévoir les tractions longitudinales dans le noyau d'un barrage sur fondation compressible (Eisenstein et al., *op.cit.*).

En général, on applique la pesanteur à une nouvelle couche (initialement sans contrainte) sous forme d'une force de volume verticale. Cette méthode a le défaut de ne pouvoir prendre en compte les contraintes initiales dues au compactage. Naylor (1975) a modélisé l'effet du compactage des noyaux d'argile, d'une façon assez sommaire, par un calcul en contraintes effectives. La méthode s'applique aux remblais argileux qui sont assez humides pour que l'argile devienne saturée quand elle est à une profondeur un peu inférieure à la hauteur du barrage, et qui sont construits dans des conditions essentiellement non-drainées. On suppose que les contraintes totales initiales sont nulles mais qu'il existe une pression interstitielle initiale négative et donc que les contraintes effectives sont positives ( $\alpha'_0 = \alpha''_0 = -u_0$ ). On choisit cette valeur initiale de façon à ce que la rigidité de l'argile en non-drainé soit voisine de la valeur mesurée pour l'argile après compression jusqu'à saturation complète. Dans le calcul (non-drainé) la résistance ne varie pas au cours de la construction (sauf si le modèle prend en compte les effets de dilatance, c'est-à-dire de couplage entre le déviateur de déformation et la contrainte effective moyenne). En réalité, il y a un accroissement de la résistance jusqu'à la saturation, puis constance de la résistance (jusqu'à ce que la consolidation soit suffisante pour que la résistance continue à augmenter).

Il existe une autre méthode pour prendre en compte les contraintes initiales de compactage, mais, à la connaissance des auteurs, elle n'a pas encore été utilisée. Cette méthode consiste à supposer la valeur de la contrainte horizontale initiale ( $\sigma_{x0}$ ) dans la nouvelle couche. Le chargement comprend alors la pesanteur appliquée classiquement sous forme d'une force de volume verticale, ainsi que des forces

provided the stress beneath the current fill surface is correctly evaluated. They considered two alternative ways of modelling fill construction above some intermediate level. The soil was assumed to be non-linear. In the first case (Fig. 4.3a.) the remaining fill was placed in many thin layers. In the second (Fig. 4.3b.) it was placed in a single layer but the gravity loading was applied in a large number of increments. In both cases the loading beneath the intermediate level was identical, consequently so also would be the displacement. Although the computational effort is much the same for the two methods the single lift alternative is likely to be much more convenient, particularly if the finite element program is structured to apply the load in a series of steps or increments.

Naylor *et al.* (*op.cit.*) also assessed the two-dimensional effect. They first considered an idealized section comprising a compressible central core between rigid shoulders. This was chosen to exaggerate the error due to using too few layers. Three to twelve layers were studied. Further studies were carried out on the section of an actual central clay core dam. It was concluded that five analytical layers was quite sufficient for most cases. In fact the differences in displacement and stress fields between three or four layers and a large number was very small. By contrast Strohm and Eisenstein *et al.* (1972) found that about ten layers were needed to obtain displacements and stresses which did not change significantly with a further increase in the number of lifts. Their studies focussed on the influence the number of layers had on cracking.

Clearly there is controversy in this area. Two issues need to be separated. The first is the correct interpretation of the finite element analyses, particularly regarding the need to ignore displacements computed in new layers while they are being loaded. The second is the dependency of the number of layers on the characteristics of the dam and what it is in that dam which is of interest. Thus a single lift analysis may be quite adequate to obtain the vertical stress distribution in a homogeneous dam on a rigid foundation, whereas several layers (and a three-dimensional analysis) are needed to predict cross-valley core tensions for a dam on a compressible foundation (Eisenstein *et al.*, *op.cit.*).

Gravity is normally applied as a vertical body force to the initially stress free new layer. This procedure has the drawback that it cannot incorporate the initial stresses locked into the fill during compaction. Naylor (1975) has taken compaction into account in a crude way for clay cores by means of an effective stress analysis. The method applies to clay fill which is wet enough for the clay to become fully saturated when buried to a depth somewhat less than the dam height and is constructed under essentially undrained conditions. Initial total stresses are assumed zero but an initial negative pore pressure ( $u_0$ ) together with equal and opposite effective stress components (*i.e.*  $\alpha'_{x0} = \alpha'_{y0} = -u_0$ ) are assumed. This initial value should be chosen so that the undrained strength of the clay will approximate the measured value for the clay after it has been compressed to full saturation. In the (undrained) analysis the strength will not change during construction (unless the analytical model takes into account dilatancy effects, *i.e.* couples shear distortion to changes in mean effective stress). In reality there will be an increase in strength until saturation is reached whereupon it will be sensibly constant (until, that is, significant consolidation occurs when the strength will increase further).

An alternative way of incorporating the initial stresses due to compaction, but which has not, to the writer's knowledge, been tried yet, is to assume the value of the horizontal stress ( $\sigma_{x0}$ ) in the new layer. Loading would then comprise gravity, applied in the usual way as a vertical body force, but with in addition outwardly

horizontales dirigées vers l'extérieur et appliquées aux extrémités de la couche pour annuler la contrainte horizontale en ces points. Ingold (1979) a étudié les effets du compactage derrière les murs de soutènement. Cet auteur donne des critères reliant les contraintes horizontales (initiales ou ultérieures) aux caractéristiques du compactage (poids du rouleau, ou poids équivalent pour les compacteurs vibrants).

Dans le calcul par éléments finis de la construction des barrages en remblai, deux questions demandent donc des recherches complémentaires: la question du nombre de couches nécessaires; la question des contraintes initiales dues au compactage (quelle est l'erreur induite par leur omission et, si cette erreur est significative, comment modéliser au mieux ces contraintes).

#### 4.4. MISE EN EAU

Lors de sa première mise en eau, un barrage en terre est soumis à un chargement hydrostatique et, de plus, du fait de la saturation, le matériau du remblai se ramollit et s'affaiblit (Nobari et Duncan, 1972). Ces deux effets sont couplés et produisent un tassement supplémentaire du remblai ainsi que des déplacements horizontaux et des modifications du champ de contraintes (quelquefois mises en évidence par des fissurations). Nobari et Duncan (*op.cit.*) ont trouvé jusqu'à 10 cas réels de barrages pour lesquels on a observé, lors de la première mise en eau, des mouvements importants.

De tels mouvements peuvent être assez compliqués comme l'ont montré Marsal et Ramirez (1967) pour le barrage de El Infiernillo en fonction du niveau de la retenue. Par rapport à une verticale initiale, le noyau s'est d'abord déplacé vers l'amont, quand le niveau de la retenue a atteint la moitié de la hauteur du barrage (Fig. 4.4.). Puis une élévation du niveau de l'eau a entraîné un changement de la tendance, avec un déplacement vers l'aval dans la partie inférieure du barrage, et vers l'amont dans la partie supérieure. Enfin, le remplissage complet a produit un déplacement général vers l'aval.

Pour analyser des mouvements aussi complexes, Nobari et Duncan (*op.cit.*) ont étudié les effets de la mise en eau sur un barrage zoné. Les quatre effets principaux sont illustrés séparément sur la Fig. 4.5. Le ramollissement dû à la saturation de la recharge amont est l'effet principal pendant la première phase de la mise en eau, tant que les pressions de confinement au-dessus de la zone mouillée restent grandes. Il en résulte un déplacement entièrement vers l'amont. D'autre part, les dernières étapes de la mise en eau produisent des mouvements vers l'aval car l'effort exercé par l'eau sur le noyau croît comme le carré de la hauteur d'eau. Les deux autres effets observés pendant la mise en eau sont, d'une part, la pression de l'eau sur la fondation et, d'autre part, la poussée d'Archimède sur la recharge amont. Il est possible que ces deux derniers effets se compensent, mais dans une proportion inconnue, de telle sorte qu'on ne peut les négliger dans le calcul. Il faut noter que la charge du réservoir sur la fondation agira vers le bas si celle-ci est relativement imperméable (Fig. 4.5.). Si la fondation est perméable, il y aura une poussée vers le haut comme dans la recharge amont.

Nobari et Duncan (*op.cit.*) ont eu une approche originale du calcul par éléments finis pendant la première mise en eau. La pression hydrostatique est appliquée (sous forme de pression externe) sur les faces amont de la fondation et du noyau. La poussée d'Archimède sur la recharge amont est représentée par des forces nodales appliquées dans la zone noyée.

Cependant, la modélisation du ramollissement dû à la saturation et de la contraction volumique qu'il entraîne est plus compliquée. Le phénomène de ramollissement est clairement montré par les courbes contraintes-déformations de deux essais triaxiaux effectués par les mêmes auteurs pour le matériau des recharges du barrage d'Oroville (Fig. 4.6.). La courbe pour le matériau humide présente un module et une résistance plus faibles, pour les mêmes conditions de contraintes. La Fig. 4.7. montre le même effet sous une forme différente: au moment de la saturation d'échantillons triaxiaux, on observe de brusques variations du déviateur de contrainte

directed horizontal forces applied to the ends of the layer to reduce the horizontal stress there to zero. Ingold (1979) in studying the effect of compaction behind retaining walls provides criteria for relating the initial (and subsequent) horizontal stresses to the weight of the roller (or equivalent weight for vibrating rollers).

Two areas stand out as needing further investigation in the finite element analysis of construction. These are the question of the number of layers needed, and the question of what error is involved in ignoring the locked in stresses due to compaction and, if this is significant, how can they best be modelled.

#### 4.4. RESERVOIR FILLING

During the initial filling of the reservoir, an earth dam is subjected to the water loading and undergoes softening and weakening of the fill material due to wetting (Nobari and Duncan, 1972). These two effects are coupled and, as a result, the embankment experiences additional settlement, horizontal displacement and changes in stress field demonstrated sometimes by cracking. Nobari and Duncan (*op.cit.*) found as many as ten case histories of earth dams with observed behaviour during first filling, which have shown clearly both the existence and importance of movements during this period.

Such movements can be rather complicated in their nature, as has been shown by Marsal and Ramirez (1967) in the case of El Infiernillo Dam. Fig. 4.4. shows the horizontal displacements which took place in the core of El Infiernillo Dam as a function of the rising water level in the reservoir. Relative to a straight vertical line at the beginning, the core moved to the upstream side when the water reached approximately the middle of the dam height. Further rise of water changed the deflection trend, with the lower portion of the dam deforming downstream and the upper part moving upstream. Finally, the full reservoir caused an entirely downstream displacement.

In order to analyse such complex movements, Nobari and Duncan (*op.cit.*) studied the effects of reservoir filling on a zoned dam. The four main effects are shown separately on Fig. 4.5. Softening due to wetting of the upstream shell is the dominant effect during the initial stage of filling since the overburden pressures above the wetted zone are still large. Entirely upstream deflections result. On the other hand the later stages of reservoir filling produce downstream movements as the water load on the core increases with the square of the height of the impounded water. There are two other effects during filling, namely water load on the foundation and buoyant uplift on the upstream shell. These may counteract each other, but to an unknown extent and as such cannot be neglected in an analysis. Note that the reservoir load on the foundation will only act downwards as shown in Fig. 4.5. if it is relatively impervious. If the foundation is pervious it will experience uplift as in the upstream shell.

Nobari and Duncan (*op.cit.*) developed an original approach to a finite element analysis during the first filling of reservoir. The water loads are applied as a boundary pressure to the foundation and core upstream face (Fig. 4.5.). The buoyant uplift forces in the upstream shell are represented by nodal point loads applied to the submerged elements.

The idealization of the softening and consequent volume reduction due to wetting is, however, more complicated. The softening phenomenon is clearly shown on the stress-strain curves of two triaxial tests obtained by the same authors for Oroville Dam shell material (Fig. 4.6.). The wet material curve indicates lower moduli and strength for the same stress conditions. The same effect is illustrated in a different way in



et du volume. Ces essais ont été effectués par le L.N.E.C. de Lisbonne pour le barrage de Beliche (Sud du Portugal), en construction au moment de la rédaction de cet article (1984).

Pour modéliser cet effet dans un calcul par éléments finis, il est nécessaire d'introduire une procédure permettant de simuler un changement des propriétés des matériaux (à la fois en raideur et en résistance). Ceci peut être conçu comme un procédé de *relaxation*, selon les étapes suivantes.

1.  
Décharger le matériau sec depuis son état de contrainte effective immédiatement avant saturation ( $\alpha_0$ ) et déterminer les déformations associées, c'est-à-dire redescendre la courbe contraintes-déformations jusqu'à l'origine. (N.B.: Il est clair que les déformations ainsi obtenues sont fictives et qu'en général elles ne satisfont pas les conditions de compatibilité).
2.  
Modifier les propriétés du matériau, en supposant le matériau saturé, et **appliquer les déformations**. Les nouvelles contraintes ( $\alpha_1$ ) seront différentes et généralement inférieures aux contraintes initiales. Le matériau ne sera donc pas en équilibre. Imposer des blocages imaginaires pour le maintenir.
3.  
Enlever les blocages. En appliquant le principe classique des travaux virtuels, ceci conduit à calculer les forces nodales correspondant au déséquilibre de contrainte  $\alpha_0 - \alpha_1$ .
4.  
Appliquer les pressions hydrostatiques comme sur la Fig. 4.5.

Pour utiliser cette technique, il faut modéliser le remplissage de la retenue en plusieurs incréments successifs, pour lesquels on effectue les quatre étapes décrites ci-dessus. L'essentiel de cette procédure a été développé par Nobari et Duncan (*op. cit.*) bien que ceux-ci aient construit leur application spécifiquement pour les lois de comportement hyperbolique (voir chapitre 6.3.). Aujourd'hui, la généralisation de cette procédure est du domaine de la recherche.

Cette technique (incorporant le modèle hyperbolique) a été vérifiée en l'appliquant à la mise en eau du barrage d'Oroville. Pour les déplacements horizontaux, les résultats du calcul sont en bon accord avec les mesures; par contre, les tassements calculés sont inférieurs à ceux observés, sans doute parce que le calcul n'a pas pris en compte les effets du fluage et de la consolidation. On a aussi effectué un calcul simulant, en plusieurs étapes, l'effet de l'élévation du niveau de la retenue, et on a obtenu des mouvements semblables à ceux observés sur le barrage d'El Infernillo.

De ce qui précède, on peut voir qu'il n'est pas facile d'effectuer un calcul par éléments finis significatif de la mise en eau d'un barrage et que peu de recherches ont été réalisées dans ce domaine depuis le travail de pionniers de Nobari et Duncan. Aujourd'hui, il semble que la meilleure estimation de la réponse en déplacement est probablement l'extrapolation, largement empirique, des mesures faites sur des barrages prototypes auscultés. Il est clair que c'est ici un domaine dans lequel la recherche doit être orientée sur les techniques de calcul. Quand elles pourront apporter des résultats utilisables, on aura franchi une étape importante dans le calcul de contraintes réalistes pour la détermination des risques de fracturation hydraulique.

Fig. 4.7. which shows the abrupt reduction in deviator stress and volume which occurred on saturation of triaxial samples. These tests were carried out at L. N. E. C., Lisbon for the Belleche Dam in South Portugal. (Under construction at the time of writing, 1984).

To model this effect in finite element analyses it is necessary to introduce a procedure for simulating a change in material properties (both stiffness and strength). This can be conceived as a *relaxation* process in steps as follows:

1.  
Unload the dry material from the effective stress state ( $\sigma'_0$ ) immediately prior to saturation and determine the associated strains, *i.e.* back-track down the stress-strain curve to the origin. (N. B.: these strains are, of course, fictitious and will not in general satisfy compatibility requirements).
2.  
Alter the material properties according to the saturated material assumptions and **reimpose the strains**. The new stress state ( $\sigma'_1$ ) will be different and typically less than the initial. The material will not now be in equilibrium. Imaginary clamps hold it in position.
3.  
Remove the *clamps*. This involves using conventional virtual work principles to compute nodal forces corresponding to the out-of-balance stress  $\sigma'_0 - \sigma'_1$ .
4.  
Apply the hydrostatic forces as illustrated in Fig. 4.5.

In applying this technique the reservoir should be raised in a number of lifts the above four steps being carried out for each. The procedure is in essence that pioneered by Nobari and Duncan (*op.cit.*) although their application was tailored to the hyperbolic model (see 6.3. below). Its generalisation is currently the subject of research.

The technique (incorporating the hyperbolic model) has been verified by applying it to the filling of Oroville Dam reservoir. The calculated results agreed well with field observations for the horizontal movements, while the calculated settlements were smaller than the observed ones, perhaps because the analysis did not account for effects of creep, secondary compression, and consolidation. An analysis was also performed to simulate successive stages in the rise of the water level and the same type of movements were obtained as observed on the El Infiernillo dam.

It can be seen from the above that it is not easy to do a meaningful finite element analysis of reservoir filling and that little has been done in this area following the pioneering work of Nobari and Duncan. At the moment it seems that the best estimate of the displacement response is likely to come from a largely empirical extrapolation of measurements from instrumented prototypes. Clearly this is an area where research needs to be concentrated on the analytical techniques. If these can be made meaningful then an important step in the process of computing realistic stresses for hydraulic fracture potential will have been achieved.

## 4.5. RÉGIME PERMANENT

Dans le cas de la *première mise en eau*, le chargement affectait principalement la recharge amont et les pressions étaient appliquées sur la face amont du noyau, comme si celle-ci était une mince membrane imperméable. Dans le cas du service normal, l'établissement du réseau d'écoulement dans le noyau, en régime permanent, induit un autre schéma de chargement (Fig. 4.8.). En fait, dans la réalité, la distinction entre les deux cas n'est pas nette et le premier se mélange au second.

En général, le *régime permanent* est caractérisé par le développement de pressions interstitielles, dans la partie du noyau située sous la ligne de saturation. La distribution de ces pressions est liée à la forme du réseau d'écoulement correspondant. On peut obtenir facilement celui-ci par un calcul par éléments finis utilisant le même maillage que celui du calcul mécanique. La théorie du calcul par éléments finis des écoulements en milieu poreux a été donnée initialement par Zienkiewicz et Cheung (1965) et ensuite par de nombreux autres auteurs.

Une variation de pression interstitielle, due à l'écoulement en milieu poreux, produit une variation de contrainte effective et donc une variation de déformations. Celles-ci peuvent être calculées par éléments finis en utilisant la technique de *variation des pressions interstitielles connues* décrite dans le chapitre 3 de Naylor et al. (1981). Dans cette méthode, les variations de pressions, calculées séparément ou mesurées, sont introduites comme données. Elles sont converties, par le programme, en forces nodales équivalentes à un champ de forces de volume égal à l'opposé du gradient des variations de pressions interstitielles. Ces forces sont appliquées au squelette du sol, afin de pouvoir utiliser les propriétés mécaniques en contraintes effectives (ou en drainé). Quand on les utilise pour déterminer l'effet de l'établissement de l'écoulement permanent, les pressions interstitielles finales doivent être obtenues par un calcul indépendant d'écoulement (par éléments finis ou autrement). Les pressions initiales (qu'on doit soustraire des pressions finales pour obtenir les variations) sont aussi déterminées séparément. Dans des conditions idéales, si le calcul est effectué après la construction du barrage, on mesurera les pressions interstitielles initiales.

L'observation des barrages en terre auscultés montre quelques mouvements pendant la période d'écoulement permanent (Wilson, 1973). Cependant, il est difficile de séparer clairement les mouvements dus à la *première mise en eau* de ceux dus au régime permanent. En effet, il n'y a pas de hiatus net entre les deux étapes: l'écoulement commence au cours de la mise en eau.

D'un point de vue pratique, dans cette phase du chargement, il est plus important de connaître l'état de contraintes dans le noyau que le champ des déplacements. Cet état de contraintes dépendra de la forme du barrage, du profil de la fondation, de la géométrie du noyau et des recharges, de la séquence de construction. On en a besoin pour estimer le risque de fracturation hydraulique. Kjaernsli et Torblaa (1968) ont été les premiers à décrire le phénomène de fracturation hydraulique en relation avec l'observation de la fissuration d'un barrage en terre. Dans leur hypothèse (Fig. 4.9.), on compare la pression hydrostatique à la contrainte verticale totale. Quand celle-ci est inférieure à la pression hydrostatique, une fissure horizontale peut apparaître. Sherard (1973) (Fig. 4.10.) compare la simple pression hydrostatique dans un forage plein d'eau aux contraintes horizontales totales calculées par éléments finis. Il conclut qu'une fracture s'ouvrira toujours dans le plan perpendiculaire à la contrainte principale totale minimale. Vaughan et al. (1970) décrivent les problèmes d'érosion interne survenus dans le barrage de Balderhead (U.K.) en 1966-1967 ainsi que les remèdes appliqués. L'érosion fut attribuée à la fracturation hydraulique du noyau à un niveau très bas (inférieur au niveau de vidange de la retenue nécessaire à l'arrêt des fuites). Comme les pressions hydrauliques étaient nettement inférieures aux contraintes dues au poids des terres, la conclusion a été qu'un effet de voûte, ou un effet similaire, avait réduit les contraintes totales dans la zone fracturée. Aucune conclusion définitive n'a pu être tirée sur le critère précis de développement des fractures. Penman (1977) discute les différents critères applicables.

## 4.5. STEADY SEEPAGE

While the *first filling* loading scheme affected mainly the upstream shell with the core loaded as if there were a thin impermeable membrane on its upstream face, the establishment of a steady seepage flow pattern within the core initiates another loading scheme. The difference between the two stages is schematically illustrated on Fig. 4.8. In reality, however, there is not a clear distinction between them — the first merges into the second.

Generally, the *steady seepage* stage is characterised by the development of pore pressures within the part of the core which is below the phreatic line. The distribution of pore pressures is governed by a corresponding flow net. This may conveniently be obtained by a finite element technique utilizing the mesh already established for stress and strain analysis. The theory for finite element seepage analysis was first given by Zienkiewicz and Cheung (1965) with many other subsequent contributions.

A change in pore pressure caused by seepage results in a change in effective stress, thus causing additional deformations. These can be analysed by finite elements using the *known-pore-pressure change* technique described in Chapter 3 of Naylor *et al.* (1981). In this the assumed, separately calculated, or measured pore pressure changes are provided as data. They are converted in the program to a set of nodal forces which are equivalent to a body force field equal to the negative gradient of the pore pressure increase. These forces are applied to the soil **skeleton** so that effective stress (or drained) stiffness values are appropriate. When used to assess the effect of the development of steady seepage the final pore pressures would be determined from the independent seepage analysis (finite element or otherwise) and the initial pore pressures (to be subtracted from the final to give the change) also assessed independently. If the analysis is carried out after construction then ideally the initial pore pressures would be measured.

Observations on instrumented earth dams indicate some movements during the *steady seepage* period (Wilson, 1973). It is, however, difficult to separate clearly *first filling* and *steady seepage* movements, as there is no clear division between the two stages. Seepage begins as the reservoir fills.

From a practical point of view probably more important than movements at this loading stage is a knowledge of the stress distribution within the core. This will depend on the shape of the dam — foundation profile and geometry of core and shells — and on the construction sequence. It is needed to evaluate the potential for hydraulic fracturing. The phenomenon of hydraulic fracturing in connection with observed cracking of an earth dam was first described by Kjaernsli and Torblaa (1968). In their hypothesis, shown on Fig. 4.9., the hydrostatic pressure is compared with the total vertical pressure. Where the total vertical pressure is less than the hydrostatic pressure a horizontal crack may develop. Sherard (1973) (Fig. 4.10.) related simple hydrostatic pressure in a water filled borehole to total horizontal stresses computed by finite element analysis. He concluded that a fracture will always open on the plane perpendicular to the minimum principal total stress. Vaughan *et al.* (1970) reports the internal erosion problems which occurred in the Balderhead Dam (U.K.) in 1966–1967 and the remedial measures taken. The erosion was attributed to hydraulic fracture in the core at a fairly low level (below the level of drawdown required to stop the leakage). Since the hydraulic pressure was considerably less than the overburden pressure it was concluded that there must have been arching or some other effect which reduced the total stress in the region of cracking. No firm conclusions could be drawn as to the precise criterion for the development of fracture. Penman (1977), in his article on the failure of Teton Dam where hydraulic fracture is a strong suspect due also to low total stresses in the core (or core cut off

dans son article sur la rupture du barrage de Teton. Dans cette rupture, on suspecte beaucoup le rôle de la fracturation hydraulique ainsi que les faibles contraintes totales dans le noyau et dans la tranchée parafouille sous le noyau. Les mesures effectuées par Penman (1975) montrent que la fracturation se produit quand la valeur de la pression interstitielle est comprise entre les contraintes principales totales majeure et mineure. Un critère conservatif est d'imposer une contrainte principale mineure toujours supérieure à la pression interstitielle, mais ce n'est pas toujours possible. Une approche moins conservatrice mais probablement plus réaliste est d'utiliser la contrainte moyenne.

La Fig. 4.11. donne un schéma plus complet des pressions agissant dans le noyau d'un barrage en terre dans les conditions du régime permanent. Sur une ligne verticale au milieu du noyau, les différentes pressions sont tracées en fonction de la profondeur. La contrainte totale due au poids des terres est généralement réduite à une valeur sensiblement inférieure  $\sigma_v$  de la contrainte verticale, en raison des effets de voûte ou d'autres transferts de contrainte. La Fig. 4.12. illustre ceci dans le cas du barrage John-Martin dans lequel un transfert important de  $\sigma_v$  du noyau sur les recharges fut mesuré par des cellules de pression. La contrainte principale totale mineure  $\sigma_3$  est en général inférieure à  $\sigma_v$ . En l'absence de mesures,  $\sigma_v$  et  $\sigma_3$  ne peuvent être déterminées que par un calcul de contraintes. La distribution des contraintes totales (qui est supposée dans la Fig. 4.11.) est comparée avec la distribution des pressions interstitielles et, selon la forme réelle des courbes, une zone de contraintes effectives négatives peut apparaître. L'existence d'une telle zone indique la possibilité de fracturation hydraulique. Il est important d'insister sur le fait que, sans le calcul des contraintes totales et effectives, et des pressions interstitielles (possibles grâce à la méthode des éléments finis), il serait impossible d'effectuer une étude rationnelle du phénomène de fracturation hydraulique.

On peut aussi avoir besoin de la description de l'état de contraintes en régime permanent, comme état initial d'un calcul sismique. Un exemple d'étude de ce type est donné par Valera et Chen (1974) pour le nouveau barrage inférieur de Van Norman (Californie).

#### 4.6. VIDANGE RAPIDE

On peut caractériser la vidange rapide comme l'opération consistant à enlever relativement vite une partie de la charge due à l'eau sur une partie de l'amont d'un barrage. La vitesse de vidange réelle dépend des ouvrages de restitution de l'aménagement, mais elle est en général assez forte pour produire des conditions de chargement non-drainé dans le noyau et probablement aussi dans les parties les plus internes de la recharge amont. Les variations de contraintes effectives et les déformations qu'elles produisent peuvent être calculées par la méthode des éléments finis.

La Fig. 4.13. donne le schéma de chargement pour la vidange rapide d'un barrage dont la recharge amont est parfaitement drainée. On doit introduire trois effets dans le calcul. Le premier est la disparition de la poussée d'Archimède exercée sur la recharge amont. Ceci entraîne un accroissement des forces de pesanteur effective dans la zone dénoyée. Le deuxième effet concerne le noyau, dont la perméabilité est faible et qui perd donc peu d'eau en comparaison avec la recharge. La disparition du chargement dû à l'eau peut donc, dans ce cas, être représentée par des forces nodales agissant sur la face amont du noyau. Une variation des contraintes totales produira une variation des pressions interstitielles. Le troisième effet de la vidange rapide concerne la fondation: la réduction du chargement dû à l'eau peut, ici aussi, être représentée par des forces nodales, comme pour le noyau, à condition de supposer la fondation non drainée.

La prise en compte de la disparition des forces d'Archimède dans un calcul par éléments finis est facilement faite par une modification des poids volumiques, que le programme convertit en forces nodales équivalentes. La Fig. 4.14. donne un schéma de cette procédure. Les déformations correspondantes sont obtenues en utilisant la courbe contraintes-déformations du matériau saturé.

trench), discusses the criteria which are applicable. In measurements carried out by him (Penman, 1975) he found that fracture occurred when the pore pressure lay between the major and minor principal total stress. A conservative criterion is to require the minor principal stress always to exceed the pore pressure although it may not always be possible to achieve this. A less conservative but possibly more realistic approach is to use the mean stress.

A more complete scheme of pressures acting in an earth dam core is given for the *steady seepage* condition in Fig. 4.11. Considering a vertical line through the middle of the core with a developed seepage flow pattern, various pressures are plotted along the depth. The total overburden pressure is in most cases reduced through arching or stress transfer to a somewhat smaller vertical pressure  $\sigma_v$ . This is illustrated for the John-Martin Dam in Fig. 4.12, where a major transfer of  $\sigma_v$  from the core to the adjacent shells was measured by pressure cells. The total minor principal stress  $\sigma_3$  is usually less than  $\sigma_v$ . In the absence of measurements,  $\sigma_v$  and  $\sigma_3$  can be determined only by a stress analysis. The total stress distribution (which is assumed in Fig. 4.11.) is compared with the pore pressure distribution and, depending on the real shape of the curves, a zone of negative effective stress could emerge. The existence of such a zone indicates the possibility of hydraulic fracturing. It should be emphasised that without an analysis of total, effective and neutral pressures made possible by finite elements, a rational study of the hydraulic fracturing phenomenon would not be feasible.

A description of stresses during the *steady seepage* condition may be also required as an initial step in a seismic analysis. An example of a study of this kind is given by Valera and Chen (1974) for the new Lower Van Norman Dam in California.

#### 4.6. RAPID DRAWDOWN

Rapid drawdown of a reservoir is an operating measure characterised by a relatively quick removal of water load from a part of the upstream side of a dam. The actual rate of drawdown will depend on the dewatering facilities provided for the reservoir but will usually be so quick as to cause an undrained loading condition in the core and possibly also in at least the inner regions of the upstream shell. Change of effective stresses results in corresponding deformations. Both the stress change and resulting deformations can be analysed by the finite element method.

The loading scheme for *rapid drawdown* of a dam with a free draining upstream shell is shown on Fig. 4.13. There are three effects to be introduced into the analysis. The first is the removal of buoyancy in the upstream shell, which increases the effective self weight of the elements within the drawdown zone. The second effect concerns the core, which is of low permeability and the amount of drainage from it is negligible compared to the shell. The removal of water load in this case can be represented by corresponding nodal forces along the upstream face of the core. A change in total stress would cause a change in pore pressure. The third effect of rapid drawdown concerns the foundation. A reduction of water load here can again be simulated by equivalent nodal forces as for the core if the foundation can be assumed undrained.

The introduction of buoyancy removal into a finite element analysis is conveniently represented by a change in unit weight, which can be converted into equivalent nodal forces. A scheme of this procedure is shown on Fig. 4.14. The corresponding deformations should be determined using stress-strain relationships appropriate to the saturated material.

Une autre approche consiste à faire un calcul en *variation de pressions interstitielles connues*. La comparaison des pressions interstitielles initiales (correspondant à la retenue pleine) et des pressions interstitielles finales (nulles au-dessus du niveau final de la retenue) donne automatiquement la diminution des poussées d'Archimède. On peut faire la même chose pour le noyau et la fondation, s'ils sont perméables. Cette technique est équivalente à l'application des forces de volume et de surface décrites ci-dessus. La différence vient de ce que l'ordinateur convertit les gradients de variations de pression interstitielle en forces nodales. Ceci suppose que les pores restent saturés. On doit modéliser le drainage en diminuant, du poids de l'eau qui s'échappe, la valeur des forces de volume verticales, orientées vers le bas.

#### 4.7. ÉTAPES DU CALCUL

Pour éclairer la mise en oeuvre des techniques décrites ci-dessus, considérons les phases successives du calcul d'un barrage en terre à noyau central (Fig. 4.1.). Pour les autres types de barrages en remblai, ces procédures ne diffèrent, en général, que sur des points de détail. On suppose qu'il s'agit de modéliser la construction, suivie de la mise en eau.

1.  
Dessiner un maillage d'éléments finis, décrivant la géométrie du barrage ainsi qu'une partie de la fondation, si celle-ci n'est pas considérée comme rigide. Le maillage doit être tel qu'à l'intérieur du barrage les limites entre éléments correspondent aux formes du barrage à diverses étapes de sa construction. En général, ces limites sont horizontales, mais si le barrage doit être construit selon un autre procédé, les limites entre éléments doivent respecter les formes réelles. Le nombre de ces formes provisoires du barrage correspond au nombre de couches d'éléments finis que l'on pose lors du calcul de construction (cf. §.4.3.): en général cinq ou plus. Pour cette discrétisation, on peut utiliser un programme de génération automatique de maillage (soit intégré au programme d'éléments finis, soit séparé).
2.  
Introduire les données géométriques: numéros d'éléments et de noeuds, conditions de blocage. Ceci peut être la première partie du fichier complet de données du calcul par éléments finis. On peut aussi, à ce stade, faire un dessin automatique de vérification du maillage, qui permet de corriger les erreurs éventuelles avant de lancer le calcul principal.
3.  
Introduire les données mécaniques pour le premier calcul (ou les ajouter au fichier de données). Ceci comprend: les contraintes initiales, les propriétés des matériaux et leur distribution. Dans le plus simple des cas, cette première étape sera le calcul d'une seule couche, posée sur une fondation horizontale. Cependant, quelquefois, il peut être nécessaire de modéliser une phase antérieure à la construction proprement dite, comme par exemple, l'excavation jusqu'au *bedrock* dans la zone de contact du noyau.
  - (a) **Contraintes initiales.** En général, ces contraintes sont prises nulles dans les éléments du remblai, bien que, comme on l'a vu au §.4.3., le compactage d'un noyau d'argile puisse être facilement pris en compte dans un calcul en contraintes **effectives**, en fixant une pression interstitielle initiale négative et des contraintes effectives de compression égales en valeur absolue ( $\alpha'_0$ ,  $\alpha''_0$ ). Dans la fondation (que ce soit le *bedrock* ou les terrains de couverture), l'état de contraintes initiales imposé doit être équilibré; mais ceci n'est pas essentiel si le matériau est élastique linéaire. Le principe de superposition est alors valable, et on peut ajouter les contraintes initiales plus tard si on en a besoin. Par contre, les contraintes initiales sont nécessaires pour les matériaux non-linéaires, dont la loi rhéologique dépend de l'état de contrainte.
  - (b) **Propriétés des matériaux.** On doit les donner dans les éléments de fondation depuis le début du calcul. Selon le mode de calcul adopté, les éléments qui n'existent pas à la fin de la première phase (c'est-à-dire les éléments du remblai qui

An alternative approach is to use a known-pore-pressure change analysis. The specification of final pore pressures which are zero above the drawn down level and initial pore pressures corresponding to the full reservoir would automatically model the loss of buoyancy. The same can be done for the core and the foundation if it is pervious. This technique is equivalent to the application of surface and body force loadings described above. The difference is that the computer converts the gradients of the pore pressure changes into the nodal loadings. This assumes the voids remain full of water. Drainage of this must be modelled by a reduction in the downward body force equal to the unit of weight of water which escapes.

#### 4.7. STEPS IN AN ANALYSIS

The implementation of the foregoing techniques will be made clearer by considering the stages involved in the analysis of a central clay core dam of the type illustrated in Fig. 4.1. The procedures apply generally differing only in detail for different types of embankment dam. It will be assumed that construction followed by reservoir filling is to be modelled. The stages are as follows.

1.  
Draw up a finite element mesh to describe the geometry of the dam and also a portion of the foundation if this is to be assumed other than rigid. The mesh should arrange for element boundaries inside the dam to correspond to surface profiles at various stages during construction. These are usually horizontal but should not be so if the dam is to be constructed in other than horizontal layers. The number of these profiles will correspond to the number of *finite element layers*, and will usually be five or more (see section 4.3.). The subdivision of the outline geometry into finite elements may be assisted by the use of automatic mesh generation. (Either as part of the main finite element program or separately).

2.  
Input the geometric information: element numbers and associated nodes, nodal co-ordinates, and boundary node fixity conditions. This may form the first part of a single data file which when complete will contain all the information for the finite element analysis. Alternatively a preliminary analysis to produce a plot of the mesh may be made. Errors can then be corrected before proceeding with the main analysis.

3.  
Input properties (or add them to the input data file) for the first analysis. These comprise initial stresses, material properties and their distribution. In the simplest case, the first analysis will consist of the first layer of construction above a horizontal foundation. Sometimes, however, there will be a need for a preconstruction analysis to model, say, excavation to bedrock over the core contact area.

(a) **Initial stresses.** Usually these will be zero in the fill elements although, as has been mentioned in section 4.3., the cohesion of a clay core in an **effective** stress construction analysis can conveniently be incorporated by specifying an initial negative pore pressure together with equal compressive effective stress components ( $\alpha'_0$ ,  $\alpha''_0$ ). Foundation material (whether bedrock or alluvium overlying bedrock) should be assigned a self equilibrating initial stress field although this is not essential if this material is to be modelled as linear elastic. Superposition is then valid and the initial stresses can be added later if needed. The initial stresses are needed for non-linear materials where the stiffness is stress dependent.

(b) **Material properties.** These must be assigned to foundation elements from the outset. The elements which will not exist at the end of this first analysis (*i.e.* all fill elements if it is a pre-construction analysis, or all except the first layer if it is the first



n'ont pas encore été posés) peuvent, soit être complètement exclus du modèle, soit être considérés comme des éléments *fantômes* auxquels on donne une rigidité très faible (par exemple, un millième de leur valeur *in situ*). L'exclusion des éléments non-construits entraîne une complication des données, puisque le maillage change à chaque étape du calcul. Par contre, l'utilisation d'éléments *fantômes* est plus simple, mais coûte plus cher en temps-machine. Pour simuler le fait que les couches de remblai mises en place dans la réalité sont beaucoup moins épaisses que celles du modèle numérique, on peut donner aux éléments de remblai, à poser dans le modèle, une rigidité réduite. Une réduction de quatre du facteur par rapport à la valeur *in situ* a été jugée convenable, bien que ce facteur ne soit pas fondamental.

(c) **Distribution des propriétés.** Les données doivent permettre d'associer aux éléments les valeurs des contraintes initiales et des caractéristiques des matériaux. Dans les maillages fins, il peut être suffisant d'associer à chaque élément un seul jeu de valeurs (par exemple,  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$ ,  $u_0$  pour les contraintes initiales). Cependant, il est souhaitable de représenter une variation de ces paramètres, à l'intérieur d'un même élément, et en particulier pour les contraintes initiales. Ceci peut être effectué en faisant varier chaque paramètre en fonction de la cote, ou bien en donnant des valeurs nodales des paramètres, sur les limites entre éléments.

4.

Introduire le chargement pour le premier calcul (ou l'ajouter au fichier de données). Si le chargement comprend une excavation, on doit utiliser une des deux stratégies décrites dans le chapitre 3 de Naylor et al. (1981). (La première de ces stratégies utilise des forces de surface pour annuler les contraintes initiales sur les limites de l'excavation. Dans la seconde, ces forces de déchargement sont calculées automatiquement). Pour les calculs de construction, on applique la pesanteur sur la nouvelle couche, sous forme d'une force de volume égale au poids volumique du remblai.

5.

Effectuer le premier calcul. Quand on utilise un matériau à rhéologie non linéaire, ce premier calcul comprend lui-même plusieurs calculs par éléments finis. La méthode peut être incrémentale (en appliquant le chargement par étapes), itérative, ou les deux. A la fin du calcul, les contraintes doivent être stockées (dans l'ordinateur ou sur une sauvegarde) pour le prochain calcul.

6.

Effectuer les calculs suivants (un par couche) jusqu'à la fin de la construction. Ceci entraîne la répétition de ce qui a été fait pour la première couche, à l'exception du fait qu'on prend comme contraintes initiales celles résultant du calcul précédent. Comme on l'a dit précédemment, le maillage sera le même, dans le cas où l'on utilise des éléments *fantômes*, sinon, il sera modifié pour chaque calcul.

7.

Effectuer le (ou les) calcul(s) de mise en eau. Ceci peut être fait en une seule phase, mais il est préférable de représenter l'élévation du niveau de la retenue en plusieurs étapes. La procédure a été résumée au §.4.4. et, comme on l'a dit, elle n'a été établie en détail que pour un modèle rhéologique hyperbolique (voir chapitre 6.3.). De plus, et ce point n'est pas abordé dans le §.4.4., il est nécessaire de prendre en compte les modifications du chemin de contrainte dues au chargement de mise en eau, ainsi que leurs influences sur les propriétés des matériaux. Ceci s'ajoute à l'effet de la saturation et conduit en général à une augmentation de la rigidité (incrémentale).

analysis of the construction sequence) can either be omitted entirely or else be classified as *ghost* elements and given a very low stiffness (e.g. one thousandth their *in situ* value), which will depend on the computing scheme adopted. The omission on the non-existent elements complicates the data handling as the mesh must change from one analysis to the next. The use of ghost elements costs more in computing time but is simpler. Fill elements to be added in the analysis should be given a reduced stiffness to make the relatively thick finite element layer simulate several thinner physical layers. A reduction factor of four on the *in situ* value has been found suitable, although this factor is not crucial.

(c) **Distribution of properties.** The input data must relate the initial stress and material property values to elements. For fine meshes it may be sufficient to link a unique set of components (e.g.  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$ ,  $u_0$  for initial stresses) to each element. However, it is desirable to provide for variation across elements, particularly for initial stresses. This can be achieved by making the property value a function of elevation, or by assigning property sets to the nodes along element boundaries.

4.  
Input the loading (or add it to the input data file) for the first analysis. If this comprises excavation, one of the two alternative *strategies* described in Chapter 3 of Naylor *et al.* (1981) will be required. (In the first of these, surface loadings are applied which reduce the initial stresses on the excavated boundary to zero. In the second, these unloading forces are calculated automatically). For construction analyses gravity in the form of a body force of intensity equal to the unit weight of the fill will be distributed over the new layer.

5.  
Perform the first analysis. When a non-linear stress-strain law is incorporated this will, in itself, require a number of finite element solutions. These may be incremental (the loading being applied in steps), iterative or both. At the end of the analysis the stresses must be stored in the computer (or on back-up store) in readiness for the next.

6.  
Perform subsequent analyses — one for each layer — to completion of construction. These involve repetition of the procedure for the first layer, except that the initial stresses are not taken from the data file but from the previous stored values. As has been mentioned the mesh will be identical in the *ghost* element procedure is used, otherwise it must be altered for each analysis.

7.  
Carry out a reservoir filling analysis, or analyses. This may be carried out in a single stage or, preferably, in lifts. The procedure has been outlined in section 4.4, and, as is noted there, has been established in detail only for the hyperbolic model (see 6.3. below). Further point, not mentioned in that section, is the need to take into account the effect of the change in stress path due to the water loading on the material properties. This will be additional to the effect of saturation and will generally require an increase in the (incremental) stiffness.

## REFERENCES

- CLOUGH, R.W. and WOODWARD, R.J., 1967. *Analysis of Embankment Stresses and Deformations*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 93, NoSM4.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and MORGENSTERN, N.R., 1972. *An Analysis of Cracking at Duncan Dam*, Proc. of ASCE Spec. Conf. on Performance of Earth and Earth-supported Structures, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, Vo.1, pp.765-777.
- GOODMAN, L.E. and BROWN, C.B., 1963. *Dead Load Stresses and the Instability of Slopes*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 89, NoSM3, pp.103-104.
- INGOLD, T.S., 1979. *The Effects of Compaction on Retaining Walls*, Geotechnique, 29, No3, pp.265-283.
- KJARERNSLI, B. and TORBLAG, I., 1968. *Leakage Through Horizontal Cracks in the Core of Hyttejuvet Dam*, Norwegian Geot. Inst. Publ., No80, Oslo.
- KULHAWY, F.H., DUNCAN, J.M. and SEED, H.B., 1969. *Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Embankments During Construction*, USAEWES Contract Report S-69-8, Vicksburg, Miss.
- MARSAL, R.J. and RAMIREZ, L.A., 1967. *Performance of El Infiernillo Dam, 1963/1965*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 93, NoSM4, pp.265-289.
- NAYLOR, D.J., 1974. *Stress in Nearly Incompressible Materials by Finite Elements with Application to the Calculation of Excess Pore Pressures*, Int. J. Num. Meth. Engng., 8, pp.443-460.
- NAYLOR, D.J., 1975. *Numerical Models for Clay Core Dams*, Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, (Proc. of Symposium at Swansea), pp.489-514.
- NAYLOR, D.J. and JONES, D.B., 1973. *The Prediction of Settlement Within Broad Layered Fills*, Geotechnique, 23, No4, pp.589-594.
- NAYLOR, D.J., MATTAR, D. and ENGMANN, F.O., 1984. *Layered Analysis of Embankment Construction*, Int. Report C/R/480/84, Dept. of Civ. Engng., Univ. Col. of Swansea.
- NAYLOR, D.J., PANDE, G.N., SIMPSON, B. and TABB, R., 1981. *Finite Elements in Geotechnical Engineering*, Pineridge Press, Swansea.
- NOBARI, E.S. and DUNCAN, J.M., 1972. *Movements in Dams Due to Reservoir Filling*, Proc. of ASCE Spec. Conf. on Performance of Earth and Earth-supported Structures, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, pp.797-815.
- PENMAN, A.D.M., 1975. *Earth Pressure Measurements with Hydraulic Piezometers*, Ground Engineering, 9, No8, pp.17-23.
- PENMAN, A.D.M., 1977. *The Failure of Teton Dam*, Ground Engineering, 10, No6, pp.18-27.
- SKEMPTON, A.W., 1977. *The Pore-Pressure Coefficients A and B*, Geotechnique, 4, No4, pp.143-147.

STROHM, W.E. and JOHNSON, S.J., 1971. *The Influence of Construction Step Sequence and Non-Linear Material Behaviour on Cracking of Earth and Rockfill Dam*, USAEWES Mics. Paper S171-10, Vicksburg, Miss.

VALERA, J.E. and CHEN, J.C., 1974. *Stresses in an Earth Dam Due to Construction and Reservoir Filling*, Proc. of the Conf. of Analysis and Design in Geotech. Engrg., ASCE, Univ. of Texas, Vol.1, pp.33-50.

VAUGHAN, P.R., KLUTH, D.J., LEONARD, M.W. and PRADOURA, H.H.M., 1970. *Cracking and Erosion of the Rolled Clay Core of Balderhead Dam and the Remedial Works Adopted for its Repair*, Trans. 10th Int. Congress Large Dams, (Montreal), Vol.1, pp.73-93.

WILSON, S.D., 1973. *Deformation of Earth and Rockfill Dams*, in Casagrande's Volume on Embankment Dam Engineering, Wiley, New York, pp.365-418.

ZIENKIEWICZ, O.C. and CHEUNG, Y.K., 1965. *Finite Elements in the Solution of Field Problems*, The Engineer, London, Vol.220, pp.507-510.

---

## 5. ANALYSE DE LA CONSOLIDATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

---

### 5.1. INTRODUCTION

L'analyse du comportement d'un barrage en terre (et plus généralement de tout remblai comportant des matériaux peu drainants) pendant sa construction est un problème dépendant du temps, en raison des développements et dissipations des pressions interstitielles. On sait que dans les ouvrages en terre les pressions interstitielles ont une influence à la fois sur le champ de contraintes totales et sur le champ de contraintes effectives. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces pressions si on veut effectuer un calcul de contraintes et de déformations. Les effets des pressions interstitielles et leur histoire sont importants, non seulement pour évaluer les composantes des déformations dépendant du temps, mais aussi pour étudier les transferts de contraintes dus aux hétérogénéités du remblai. De nombreuses publications ont montré qu'un calcul significatif de la construction d'un barrage en terre ne peut négliger le caractère non linéaire des lois de comportement, l'effet du chargement incrémental, ni l'influence du chemin de contrainte (par exemple, Clough et Woodward, 1967; Kulhawy et Duncan, 1970; Penman et al., 1971; Duncan, 1972; Eisenstein et al., 1972a; Eisenstein et al., 1972b; Eisenstein, 1974). Le calcul des pressions interstitielles fait donc partie de ces facteurs et doit être aussi pris en compte.

De nombreux auteurs ont développé des théories sur l'évaluation des pressions interstitielles créées par la construction d'un barrage en terre. Koppala (1970) a appliqué la théorie de la consolidation bidimensionnelle, avec une limite supérieure mobile. Les contraintes totales, qui créent les pressions interstitielles, sont supposées égales aux pressions de poids des terres. Cependant, à cause des transferts de contraintes (ou des effets de voûte), les contraintes verticales dans le noyau peuvent différer considérablement des pressions de poids des terres (Squier, 1970; Skermer, 1975; Penman, 1977). Ainsi, dans quelques cas, les variations réelles de contraintes dans le noyau doivent être prises en compte.

Pour conserver la compatibilité des déformations, les contraintes totales dans une masse de sol varient au cours du processus de consolidation, même si les charges externes ne varient pas. Ces phénomènes, implicites dans la théorie de la consolidation de Biot (1941), sont incorporés dans les solutions par éléments finis de Sandhu et Wilson (1969), Hwang et al. (1971) et Hwang et al. (1972). Au moins du point de vue du calcul des barrages en terre, ces solutions sont limitées par le fait qu'elles ne prennent pas en compte les lois rhéologiques non linéaires, ni la construction par couches. Cependant, plus récemment Lewis, Roberts et Zienkiewicz (1976), Smith et Hobbs (1976) et Chang et Duncan (1977) ont inclus des non-linéarités de matériau.

Eisenstein et al. (1976) ont décrit une approche, appliquée par Eisenstein et Law (1977) au barrage de Mica. Cette approche incorpore la construction par couches et une loi rhéologique non linéaire. Dans cette approche, le calcul de chaque couche est effectué en deux étapes: un calcul non-drainé, dont on tire les variations de contraintes totales et de pressions interstitielles dues à la pose d'une nouvelle couche, suivi d'un calcul de consolidation, par pas de temps, dans lequel on suppose que les contraintes totales sont constantes. Dans l'article cité ci-dessus, le calcul non-drainé était effectué en contraintes totales et les pressions interstitielles étaient calculées grâce aux coefficients de pression interstitielle. On aurait pu aussi bien les obtenir directement par un calcul en contraintes effectives (cf. §.4.2. ci-dessus). Cette approche est considérée plus loin, au §.5.3.

---

## 5. FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONSOLIDATION

---

### 5.1. INTRODUCTION

An analysis of the construction behaviour of an earth dam with a clay core, or more generally, of any embankment containing slowly draining materials includes the problem of time dependency due to simultaneous generation and dissipation of pore pressures. Since pore pressures are known to influence the development of both total and effective stress fields within earth structures, such pressures must be considered if an overall stress and deformation analysis is to be attempted. The effects of pore pressures and their history are important not only for evaluating time-dependent components of deformation, but also for studying the phenomenon of stress transfer occurring due to the non-homogeneous composition of the embankment. A number of published studies have demonstrated that any meaningful analysis of the behaviour of earth dams during construction cannot ignore factors such as the non-linear character of stress-strain relationships, the effect of incremental loading, and the influence of the stress path followed during the loading process (e.g. Clough and Woodward, 1967; Kulhawy and Duncan, 1970; Penman *et al.*, 1971; Duncan, 1972; Eisenstein *et al.*, 1972a; Eisenstein *et al.*, 1972b; Eisenstein, 1974). Thus pore pressure analysis must recognise and be integrated with these factors.

Theories for estimating the pore pressures generated in an earth dam during construction have been developed by a number of authors. Koppula (1970) applied the theory of consolidation in two dimensions with a moving upper boundary. The total stresses that generated the pore pressures were assumed equal to overburden pressures. However, due to the existence of stress transfer (or arching), vertical stresses in the core may differ considerably from overburden pressures (Squier, 1970; Skermer, 1975; Penman, 1977). Thus in some cases the actual stress changes in the core should be taken into account.

In order to maintain strain compatibility, total stresses within a soil mass change during the consolidation process, even without a change in external load. These phenomena, implicit in the Biot (1941) theory of consolidation, have been incorporated in finite element solutions by Sandhu and Wilson (1969), Hwang *et al.* (1971) and Hwang *et al.* (1972). The limitations of these solutions, at least from the point of view of an earth dam analysis, are that they do not readily incorporate non-linear stress-strain relationships nor do they consider layered construction. More recently, however, Lewis, Roberts and Zienkiewicz (1976), Smith and Hobbs (1976) and Chang and Duncan (1977) have included stress-strain non-linearity.

An approach which allows layered construction and non-linear stress-strain law to be incorporated has particular application in the present context. It has been applied to Mica Dam by Eisenstein and Law (1977) and is described by Eisenstein *et al.* (1976). In this approach the analysis for each layer is carried out in two stages: an undrained analysis from which the total stress and pore pressure increase due to the new layer are calculated followed by a time stepping consolidation analysis in which the total stresses are assumed constant. The undrained analysis was, in the work referred to above, carried out in terms of total stress, the pore pressures being obtained by means of pore pressure parameters. They could, alternatively, have been obtained directly from an effective stress undrained analysis as described in 4.2. above. This approach is considered further in 5.3. below.

Une autre approche, assez différente, est de déterminer l'effet de la consolidation par un calcul par éléments finis de variation de pression interstitielle connue. Les dissipations de pression interstitielle sont fixées en dehors du calcul par éléments finis proprement dit: soit en faisant un calcul séparé, soit en extrapolant les mesures du début de la consolidation, soit, enfin, en imaginant des scénarios de pressions interstitielles. Le calcul par éléments finis se contente de déterminer la réponse du squelette du sol à une variation fixée des pressions interstitielles. La méthode peut être appliquée à un calcul couche par couche, aussi bien qu'à l'ensemble du barrage. Il faut noter que la phase finale de la méthode à deux étapes (décrite succinctement ci-dessus et plus en détail au §.5.3.) est en fait une technique de changement de pression interstitielle connue qui permet d'appliquer au squelette du sol les variations calculées de la pression interstitielle.

## 5.2. CALCUL DE LA PRESSION INTERSTITIELLE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Certaines des méthodes de calcul développées autrefois pour estimer la genèse des pressions interstitielles dans les noyaux de barrages en terre utilisaient la méthode des différences finies (Gibson, 1958; Koppula, 1970). Il apparaît qu'il est plus efficace d'utiliser une formulation par éléments finis du problème de la consolidation si on veut combiner le calcul des pressions interstitielles à un calcul par éléments finis des contraintes et des déplacements dans la totalité d'un barrage. Si on suppose que l'état de contrainte régnant dans le noyau central d'un barrage aux recharges plus rigides est une compression unidimensionnelle confinée on peut montrer que, pour une perméabilité isotrope, l'équation différentielle de la consolidation bidimensionnelle à limite supérieure mobile est celle donnée par Gibson (1958):

$$C_v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - \bar{B} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \quad (5.1)$$

où  $C_v$  est le coefficient de consolidation du matériau du remblai;  $u$  est la pression interstitielle;  $\sigma_1$  est la contrainte principale totale majeure (qu'on suppose constante sauf en cas de variation des chargements externes);  $\bar{B}$  est le coefficient de pression interstitielle et  $t$  le temps.

Le coefficient  $\bar{B}$  de pression interstitielle introduit par Bishop (1954) est une fonction du rapport des contraintes principales. On peut raisonnablement supposer que le noyau central d'un barrage en terre est suffisamment confiné pour que ce rapport des contraintes principales y soit constant. Les valeurs de  $\bar{B}$  à utiliser dans le calcul peuvent donc être déterminées directement à partir d'essais de compression confinée (oedomètre). Le même raisonnement peut être utilisé pour justifier l'emploi d'essais oedométriques pour déterminer les valeurs des coefficients de consolidation  $C_v$ . La technique numérique utilisée pour résoudre l'équation de la consolidation est la même que celle utilisée par Wilson et Nickell (1966) dans la formulation par éléments finis de la conduction de la chaleur, qui suit une équation semblable à l'équation (5.1). Krishnaya (1973) donne des détails sur le programme informatique.

Les principaux avantages de la formulation aux éléments finis sont:

(1) les valeurs des propriétés des sols ( $\bar{B}$  et  $C_v$ ), qui contrôlent le développement et la dissipation des pressions interstitielles, peuvent être changées pour tout élément à tout moment du processus de construction, selon l'état de contrainte ou le rapport de consolidation atteint;

(2) il n'est pas nécessaire de poser des hypothèses simplificatrices pour déterminer les contraintes principales majeures, car les contraintes sont déterminées par un calcul par éléments finis en non-drainé, auquel le calcul de consolidation est lié;

(3) enfin, il est possible de modéliser n'importe quelle géométrie, n'importe quelles conditions aux limites et n'importe quelle hétérogénéité de matériau.

Another, quite different, approach is to assess the effect of consolidation by means of a known-pore-pressure change finite element analysis. The determination of the pore pressure decay with time is taken right outside the finite element analysis. Separate analyses may be undertaken, or the pore pressure changes extrapolated from initial readings, or various pore pressure *scenarios* assumed. The finite element analysis simply computes the response of the soil skeleton to the assumed pore pressure changes. The method may be applied to the layered construction stage or to the completed dam. It is worth noting that the final stage of the *two-stage method* outlined above and enlarged upon in 5.3. In effect uses the known-pore-pressure-change technique to apply the computed pore pressure changes to the soil skeleton.

## 5.2. FINITE ELEMENT PORE PRESSURE ANALYSIS

Some of the previously developed analytical methods for estimating construction pore pressures in cores of earth dams solved the governing differential equations by the finite difference method (Gibson, 1958; Koppula, 1970). In order to combine the pore pressure analysis with a finite element analysis of stresses and movements in the entire dam, it becomes apparent that a finite element formulation of the consolidation problem would be superior to the finite difference method. Assuming that the strain condition prevailing within the centrally located core of a dam with stiff shells is one-dimensional confined compression, it can be shown that for isotropic permeability the two-dimensional consolidation with a moving upper boundary is described by the governing differential equation (Gibson, 1958):

$$C_v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - \bar{B} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \quad (5.1)$$

In which  $C_v$  = coefficient of consolidation of embankment material;  $u$  = pore pressure;  $\sigma_1$  = total major principal stress (assumed constant unless there are changes in applied loads);  $\bar{B}$  = pore pressure coefficient; and  $t$  = time.

The pore pressure coefficient,  $\bar{B}$ , as introduced by Bishop (1954) is a function of the principal stress ratio. It can be reasonably assumed that the central core in an earth-filled dam is sufficiently laterally confined to have a nearly constant total principal stress ratio. Thus the  $\bar{B}$  values used in the analysis can be determined directly from laterally confined (oedometer) compression tests. Similar reasoning can be used to justify the use of oedometer tests to determine values of the coefficient of consolidation  $C_v$ . The numerical technique used in solving the consolidation equation followed the finite element formulation of the heat conduction problem by Wilson and Nickell (1966), which is described by an equation of the same type as Eq. 5.1. Details of the computer program are given by Krishnayya (1973).

The main advantages of the finite element formulation are:

- (1) the values of soil properties,  $\bar{B}$  and  $C_v$ , (controlling the generation and dissipation of pore pressure) can be changed for any element at any stage of the construction process depending on the state of stress or consolidation ratio achieved;
- (2) simplifying assumptions concerning the magnitude of the major principal stress are not necessary since the stress is obtained from the finite element undrained analysis, with which the consolidation analysis is linked; and
- (3) any geometry of drainage boundary conditions and non-homogeneous material distribution are easily modelled.



### 5.3. LA MÉTHODE DES DEUX ÉTAPES

L'erreur due à l'hypothèse de constance des contraintes totales peut être limitée par le fait que, dans la pratique, les résultats ne sont pas modifiés de façon significative. En même temps que la consolidation du noyau, le processus de construction du barrage continue à se produire. Ceci est modélisé en ajoutant de nouvelles couches au barrage, chacune représentant un chargement supplémentaire et donc une modification des contraintes totales. Donc, l'intervalle de temps pendant lequel on suppose que les contraintes totales sont constantes est seulement celui qui sépare la pose de deux couches successives. Si on s'assure que cet intervalle reste raisonnablement court, l'hypothèse de constance des contraintes totales n'a pratiquement pas d'influence sur les résultats.

Les déformations dans les sols cohésifs peuvent être calculées comme la somme des déformations instantanées (non-drainées) et des déformations de consolidation. Ce principe peut être utilisé dans le calcul par éléments finis des noyaux argileux (Eisenstein, 1974; Eisenstein et al., 1976). Immédiatement après le chargement (après le placement d'une nouvelle couche de remblai), on peut obtenir les contraintes totales correspondantes et les déformations instantanées par un calcul éléments finis basé sur les modules élastiques en contraintes totales. Les surpressions interstitielles générées dans cette phase se dissipent pendant la consolidation et on peut les déterminer à tout moment grâce au calcul de consolidation dans lequel on suppose constantes les contraintes totales. Les variations de pression interstitielle produisent des variations de contraintes effectives, qui, à leur tour, constituent le chargement pour un calcul par éléments finis du squelette (en contraintes effectives) basé sur les modules élastiques en contraintes effectives. Par ce moyen, on calcule les déformations dues à la consolidation. A tout moment, la déformation finale est obtenue en ajoutant la déformation instantanée (donnée par le calcul en non-drainé) à la déformation de consolidation (donnée par le calcul de consolidation). La Fig. 5.1. donne le schéma de ce principe de calcul.

Pour vérifier les équations de l'équilibre global de la totalité du barrage, cette méthode de calcul nécessite un calcul par éléments finis (en contraintes totales ou effectives) pour chaque étape de construction et un calcul de consolidation (en contraintes effectives) pour chaque pas de temps. Eisenstein et Law (1977) donnent des détails sur cette méthode. Ils l'ont appliquée à la construction du barrage de Mica au Canada. La comparaison des résultats des mesures et des calculs (pour les pressions interstitielles et pour les tassements) montre que cette approche est capable de représenter les comportements réels avec un degré de précision raisonnable. On doit encore rappeler les précautions à prendre pour généraliser cette méthode, qui ne prend pas correctement en compte les interactions entre zones.

### 5.3. THE TWO STAGE METHOD

The error due to the assumption of constant total stresses during consolidation can be limited to the extent that the practical results are not significantly affected. Simultaneously with the consolidation process in the core filling of the dam continues. This is modelled analytically by adding new layers to the dam, each representing a new loading and thus a new total stress condition. Therefore, the time period during which the total stresses are assumed constant is equal only to the interval between the placement of two subsequent layers. If this interval is kept reasonably short the assumption of constant total stresses may have practically no impact on the results.

Deformations in cohesive soils can be obtained as the sum of immediate (undrained) and consolidation deformations. This principle can be utilised in the finite element analysis of clay cores (Eisenstein, 1974; Eisenstein *et al.*, 1976). Immediately after loading (or placing an additional layer of fill) the corresponding total stresses and immediate deformations can be obtained from a finite element undrained analysis based on total stress elastic moduli (total stress analysis). The excess pore pressures generated dissipate during consolidation and their magnitude can be determined at any time from a consolidation analysis in which the total stress is assumed constant. The changes in pore pressure cause changes in effective stresses, which in turn constitute loading for a finite element analysis based on effective stress (or soil skeleton) elastic moduli (effective stress analysis). By this means deformations due to the consolidation are calculated. The final deformation at any time is obtained by adding the immediate deformation obtained from the undrained analysis to the consolidation deformation obtained from the consolidation analysis. The computational scheme using the principle of total and effective stress analyses for calculating consolidation deformations is shown in Fig. 5.1.

To maintain an overall equilibrium within the whole dam this method of analysis require an undrained finite element analysis (in terms of total or effective stresses) for every construction step, and a consolidation analysis (in terms of effective stresses) for every time increment. Details of the method are given in Eisenstein and Law (1977). They applied it to the construction of Mica Dam in Canada. The comparison of observed and calculated pore pressures and settlements indicated that this approach is capable of matching the real field behaviour with a reasonable degree of accuracy. Again caution should be observed in generalizing this finding since the two stage method may not properly take into account interaction between zones.

## REFERENCES

- BIOT, M.A., 1941. *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, Journal of Applied Physics, 12, pp.155-164.
- BISHOP, A.W., 1954. *The Use of Pore-pressure Coefficients in Practice*, Geotechnique, 4, No4, pp.148-152.
- CHANG, C.S. and DUNCAN, J.M., 1977. *Analysis of Consolidation of Earth and Rockfill Dams*, Dept. of Civ. Engng., Univ. of California, Berkeley, Calif., Geot. Engng. report TE77-3, 1 and 2.
- CLOUGH, R.W. and WOODWARD, R.J., 1967. *Analysis of Embankment Stresses and Deformations*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 93, NoSM4, pp.529-549.
- DUNCAN, J.M., 1972. *Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Dams, Excavations and Slopes*, State-of-the-Art Report, Proc. Symposium on Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering, (Ed. C.S. Desai), United States Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., pp.267-326.
- EISENSTEIN, Z. and LAW, S.T.C., 1977. *Analysis of Consolidation Behaviour of Mica Dam*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 103, NoGT8, pp.879-895.
- EISENSTEIN, Z., 1974. *Application of Finite Element Method to Analysis of Earth Dams*, State-of-the-Art Report, Proc. First Brazilian Seminar on Application of Finite Element Method in Soil Mechanics, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, pp.457-528.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and LAW, T.C., 1976. *Analysis of Consolidation in Cores of Earth Dams*, Proc. Second Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Engineering Foundation Conference, Blacksburg, Va., Vol.1, pp.1089-1107.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and MORGENSTERN, N.R., 1972a. *An Analysis of Cracking at Duncan Dam*, Proc. ASCE Specialty Conference on Performance of Earth and Earth-supported Structures, June 11-14, 1972, Vol.1, Part.1, Purdue Univ., Lafayette, Ind., pp.765-777.
- EISENSTEIN, Z., KRISHNAYYA, A.V.G. and MORGENSTERN, N.R., 1972b. *An Analysis of Cracking of Earth Dams*, Proc. Symposium on Applications of the Finite Elements Method in Geotechnical Engineering, United States Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mis. pp.431-455.
- GIBSON, R.E., 1958. *The Progress of Consolidation in a Clay Layer Increasing in Thickness With Time*, Geotechnique, 8, No4, p.171-182.
- HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R. and MURRAY, D.W., 1971. *On Solutions of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods*, Canadian Geotechnical Journal, 8, No1, pp.109-118.
- HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R. and MURRAY, D.W., 1972. *Application of the Finite Element Method to Consolidation Problems*, Proc. Symposium on Applications of the Finite Element Method in Geotechnical Engng., United States Army Corps. of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss., pp.739-765.

KOPPULA, S.D., 1970. *The Consolidation of Soil in Two Dimensions and with Moving Boundary*. Ph.D. Thesis, University of Alberta, Edmonton.

KRISHNAYYA, A.V.G., 1973. *Finite Element Consolidation Program for Two-Dimensional Problems (FECP 2D)*. User's Manual, Soil Mechanics No22, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton.

KULHAWY, F.H. and DUNCAN, J.M., 1970. *Non-Linear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Oroville Dam*, Report NoTE70-2, Office of Research Services, University of California, Berkeley, Calif.

LEWIS, R.W., ROBERTS, G. and ZIENKIEWICZ, O.C., 1976. *A Non-Linear Flow and Deformation Analysis of Consolidation Problems*, 1st Int. Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Blacksburg, June 1976, Vol.2, pp.1106-1118.

PENMAN, A.D.M., 1977. *The Failure of Teton Dam*, Ground Engineering, 10, No6, pp.18-27.

PENMAN, A.D.M., BURLAND, J.B. and CHARLES, J.A., 1971. *Observed and Predicted Deformations in a Large Embankment Dam during Construction*, Proc. Institution of Civil Engineers, 49, pp.1-21.

SANDHU, R.S. and WILSON, E.L., 1969. *Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 95, NoEM3, pp.641-652.

SKERMER, N.A., 1975. *Mica Dam Embankment Stress Analysis*, J. Geot. Eng. Div., ASCE, 101, NoGT3, pp.229-242.

SMITH, I.M. and HOBBS, R., 1976. *Biot Analysis of Consolidation Beneath Embankments*, Geotechnique, 26, No1, pp.149-171.

SQUIER, L.R., 1970. *Load Transfer in Earth and Rockfill Dams*, J. Soil Mech. and Fdn. Div., ASCE, 96, NoSM1, pp.213-233.

WILSON, E.L. and NICKELL, R.E., 1966. *Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis*, Nuclear Engineering and Design, 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, pp.276-286.

---

## 6. MODÉLISATION DES MATÉRIAUX ET ÉTUDES DE CAS

---

### 6.1. INTRODUCTION

Parmi les modélisations nécessaires au calcul par éléments finis des barrages en remblai, c'est-à-dire les modélisations de la géométrie, de la séquence de construction et des propriétés des matériaux, c'est certainement cette dernière qui est la plus critique. La nécessité de trouver le meilleur compromis entre la simplicité (et la rusticité qu'elle entraîne) et la finesse (et la complexité qui en découle) est particulièrement forte dans le choix des lois rhéologiques des matériaux et de leurs paramètres.

Dans ce chapitre, on donne tout d'abord un aperçu des lois rhéologiques, puis on évalue leurs performances dans l'étude de cas de barrages auscultés. On insiste sur le choix des paramètres. Quels critères doit-on prendre? Quels essais sont appropriés (s'il en existe)? On donne quelques réponses à ces questions.

Pour le calcul d'un barrage en remblai, une loi rhéologique idéale devrait avoir les propriétés suivantes:

1. Rigidité dépendant du chemin de contrainte. Ceci veut dire que le module volumétrique tangent(\*) doit croître avec la contrainte effective moyenne ou avec la densité, et que le module de cisaillement tangent(\*) doit diminuer avec le déviateur de contrainte, à contrainte effective moyenne donnée. Le module de cisaillement doit aussi diminuer avec la contrainte effective moyenne.
2. Augmentation de rigidité au déchargement (réduction du déviateur ou de la contrainte effective moyenne).
3. Critère de rupture (Mohr-Coulomb ou similaire).
4. Déformations dépendant du temps. Ceci peut être séparé en consolidation primaire, dépendant du temps (qui peut être prise en compte dans les modèles de contraintes effectives) et en fluage ou consolidation secondaire dépendant du temps.
5. Dilatance, c'est-à-dire possibilité de reproduire des variations de volume sous cisaillement pur drainé (à contrainte moyenne constante) ou sous variation de pression interstitielle si le sol est saturé et si les conditions sont non-drainées.
6. Anisotropie: la rigidité (et éventuellement la résistance) dépend de la direction.

Chacune de ces propriétés peut être mesurée séparément et décrite en termes de caractéristiques mécaniques. On a essayé d'inclure toutes ces propriétés dans un même modèle, mais sans grand succès, au moins sur le plan pratique.

---

(\*) C'est-à-dire reliant de petites variations de contraintes à de petites variations de déformations.

---

## 6. MATERIAL IDEALISATION AND CASE STUDIES

---

### 6.1. INTRODUCTION

Of the idealisations necessary for the finite element analysis of fill dams, namely the idealisations of geometry, construction sequence, and materials, the last mentioned is probably the most critical. The need to make the best compromise between simplicity with its consequent crudeness and sophistication with its attendant complication is nowhere greater than in the selection of the material stress-strain law and its associated parameters.

In this chapter a brief outline of stress-strain laws (or constitutive models) is first given leading to an assessment of them from case studies of instrumented prototypes. Emphasis is placed on the question of the selection of parameter values. What criteria should be used? What tests (if any) are appropriate? Some answers are given to these questions.

A constitutive model for the analysis of fill dams should ideally incorporate the following.

1. Stiffness properties which are stress path dependent. Specifically this means that the tangential(\*) bulk (volumetric) stiffness should increase with increasing mean effective stress or density, and the tangential(\*) shear stiffness should reduce with deviator stress for a given mean effective stress. The shear stiffness should also increase with mean effective stress.
2. On unloading (reduction in either deviator or mean effective stress) there should be an increase in stiffness.
3. A Mohr-Coulomb or similar failure criterion.
4. Time dependency of deformations. This can be divided into the time dependency of primary consolidation (which is accommodated in effective stress models), and the time dependency of creep or secondary consolidation.
5. Dilatancy, *i.e.* being able to produce volume change under drained pure shear (mean stress constant) loading (or pore pressure change if the soil is saturated and conditions are undrained).
6. Anisotropy: stiffness (and possibly also strength) may be directionally dependent.

Each of these requirements can be separately measured and described in terms of material characteristics. Attempts to incorporate all of them in a single model have, however, had little success, at least for practical applications.

---

(\*) *i.e.* relating small changes in stress to changes in strain.

---

Au contraire, les lois rhéologiques utilisées dans les programmes d'éléments finis ne possèdent que les plus importantes de ces propriétés. Par exemple, la dépendance du chemin de contrainte est limitée aux chemins de contrainte représentatifs de la plus grande partie du remblai; la dilatance est souvent négligée; la consolidation est étudiée comme un phénomène séparé, etc. . .

Plutôt que sa capacité intrinsèque à décrire le comportement des sols, l'utilité d'un modèle rhéologique dépend probablement plus de l'expérience qu'on en a et du calage qu'on a pu en faire par l'analyse *a posteriori* de barrages prototypes. Ainsi, dans certaines situations, on peut obtenir de meilleures prévisions avec un modèle élastique linéaire qu'avec un modèle plus perfectionné, simplement parce que le calculateur sait bien choisir un  $E$  et un  $\nu$ . Dans le cas du calcul des barrages en remblai, ce sont les lois *hyperboliques* (à module élastique variable (§.6.2.) qui ont été le plus utilisées depuis l'origine. On a donc accumulé beaucoup d'expérience de ces lois et on sait les utiliser à bon escient. Paradoxalement, ce fait joue contre les modèles rhéologiques plus récents, qui ont des possibilités théoriques similaires ou meilleures, qui sont plus simples en ce sens qu'ils font appel à moins de paramètres (4 ou 5 au lieu de 8 ou 9 pour les lois hyperboliques), mais qui n'ont pas encore été beaucoup utilisés pour des calculs de barrages. Dans ce sens, les auteurs suggèrent que, avant d'entreprendre le développement d'un programme de calcul, on s'attache à passer en revue les modèles rhéologiques disponibles et les paramètres qu'ils requièrent. On pourrait conseiller à ceux qui ont une expérience antérieure de s'en tenir aux modèles rhéologiques qu'ils connaissent. Par contre, les organismes de recherche devraient attacher une grande importance à la comparaison des différents modèles, comme ils le font déjà et comme ils devraient le faire sur une plus grande échelle.

Le but des ingénieurs de barrages est bien plus d'évaluer la sécurité de leurs barrages que de prévoir leurs déformations. Ceci veut dire qu'ils ont besoin de prévoir les contraintes avec une assez grande précision. Cependant, une grande partie de travaux d'analyse *a posteriori* du comportement des barrages a porté sur la comparaison des déformations calculées et mesurées. Comment justifier ce fait? La réponse est qu'un calcul qui reproduit correctement les déformations réelles doit reproduire encore mieux les contraintes. Bien qu'elles ne soient pas influencées par les valeurs absolues des rigidités, les contraintes sont affectées par les valeurs relatives des rigidités. Ainsi, un calcul qui donne une bonne concordance générale des déformations peut être supposé donner une bonne approximation des rigidités à la fois relatives et absolues. Ceci est particulièrement important pour déterminer la rigidité relative d'un noyau par rapport aux recharges.

## 6.2. MESURES DE CONTRAINTES ET DE DÉFORMATIONS

Les informations sur les propriétés des sols proviennent très souvent d'essais triaxiaux. Ceci est malheureux car la condition d'égalité de deux des contraintes principales n'est pas respectée dans la plupart des cas réels. Il est donc délicat de déterminer à partir d'un triaxial les paramètres mécaniques pour une application générale. Ceci est net pour la loi hyperbolique, décrite dans le paragraphe suivant. La formulation de base de ce modèle rhéologique relie la déformation axiale de l'essai triaxial,  $\epsilon_1$ , au déviateur de contrainte  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Il est pratique de relier les **invariants** de contrainte et de déformation. On doit donc savoir comment déterminer les paramètres reliant ces invariants, à partir d'essais tels que le triaxial.

La Fig. 6.1. montre une série de courbes de triaxial, représentées à la fois sous la forme classique et en termes d'invariants. Les invariants choisis ici sont la contrainte de cisaillement octaédrique ( $\tau_{Oct}$ ) et la déformation de cisaillement octaédrique. Cette présentation a des avantages certains. Ilés au modèle rhéologique pour lequel on va utiliser les essais. Les principaux avantages sont qu'il n'est pas nécessaire de supposer la valeur de la contrainte principale intermédiaire et que les résultats des autres essais (déformation plane, essais triaxiaux non-standard) peuvent être exprimés avec les mêmes invariants).

Instead the constitutive models incorporated in finite element programs include those factors considered most relevant. For example stress-path dependency is limited to stress paths representative of the main body of the embankment, dilatancy is often neglected, consolidation studied as a separate phenomena, etc.

The usefulness of a material model probably depends more on the experience gained of it and the calibration it has received by feed back from back analysis of prototypes than its inherent ability to describe the behaviour of the soil. Thus in certain situations better predictions may be obtained with a linear elastic model than a more sophisticated model simply because the analyst knows how to choose an appropriate  $E$  and  $\nu$ . In the case of fill dam analysis most of the early experience has been based on *hyperbolic* variable elastic model (see 6.2. below) consequently a considerable body of expertise is available on how to use it to good effect. Paradoxically this may be unfortunate as it tends to mitigate against the use of more recent models which have similar or greater theoretical potential and are simpler in the sense that fewer parameters have to be defined (4 or 5 as against 8 or 9 of the hyperbolic model) but which have not as yet been used very much in fill dam analysis. In view of this it is suggested that individuals or organizations initiating a program of analyses should look carefully at the range of models available and what is involved in selecting the parameters. Those with prior experience may be better advised to stick with the models they have used. Comparison of the different models should be a high priority for research organizations. They have already been doing this as is indicated in this chapter but the scope should be widened.

The concern of dam designers is more with predicting the safety of their dams than deformations. This means that they need to make relatively accurate predictions of stresses. Much of the work of back analysis of fill dams has, however, been concerned with matching computed deformations to measurements taken during construction. How can this be justified? The answer is that an analysis which reproduces deformations reasonably well can be expected to make an even better prediction of stresses. Although the absolute value of the stiffness does not affect the stresses at all the relative value does. Thus an analysis which gives good overall agreement of deformations can be expected to incorporate a good approximation of both the relative and absolute stiffness values. This is particularly important in determining the stiffness of the core relative to the shells.

## 6.2. STRESS AND STRAIN MESURES

Information about the properties of soils is to a large extent based on the triaxial test. This is unfortunate because the condition that two of the principal stresses are equal is unrepresentative of most prototype conditions. Care is needed therefore in determining parameters from triaxial tests for general application. A case in point is the hyperbolic stress-strain model, described in the next section, the basic form of which relates to the triaxial test axial strain,  $\epsilon_1$ , to the deviator stress  $\sigma_1 - \sigma_3$ . It is convenient to relate *invariants* of stress and strain. One needs to know, therefore, how to determine the parameters relating these from tests such as the triaxial.

Fig. 6.1. Illustrates a set of triaxial test curves presented both conventionally and in Invariant form. The invariants chosen here are the octahedral shear stress ( $\tau_{Oct}$ ) and the octahedral shear strain. This presentation has certain advantages related to the model for which the tests are to be used. The principal advantages are that it is not necessary to assume the value of the intermediate principal stress and that other tests (plane strain, non-standard triaxial tests) can be expressed in terms of the same invariants.



Dans les modèles de sols comportant un critère de rupture de Mohr-Coulomb, il est particulièrement intéressant de travailler avec des invariants ne faisant pas intervenir la contrainte principale intermédiaire  $\sigma_2$  (simplement parce que le critère de Mohr-Coulomb n'utilise pas  $\sigma_2$ ). Deux invariants utilisés dans quelques lois rhéologiques décrites ci-après sont:  $\sigma_s$ , contrainte moyenne en déformation plane et  $\sigma_d$ , déviateur de contrainte:

$$\sigma_s = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (6.1)$$

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.2)$$

Il y a d'autres définitions de la contrainte moyenne et du déviateur (semblables qualitativement et quantitativement) (\*):

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (6.3)$$

$$\sigma_q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (6.4)$$

(Noter que dans le cas du triaxial:  $\sigma_2 = \sigma_3$  ;  $\sigma_q = \sigma_d$ ).

$\sigma_s$  et  $\sigma_d$  sont particulièrement utiles pour les applications en déformation plane, dans lesquelles la contrainte perpendiculaire au plan n'intervient absolument pas. Cependant, on doit faire attention quand on les utilise pour les omniprésents essais axisymétriques. On peut aussi les utiliser dans les applications axisymétriques et tridimensionnelles (comportant un critère de Mohr-Coulomb) mais il est plus habituel d'employer dans ces cas  $\sigma_m$  et  $\sigma_q$  (ou  $\tau_{oct}$ ), et quelquefois un troisième invariant exprimé par  $J_3$  (ou angle de Lode).

(L'angle de Lode,  $\theta$ , précise l'orientation du point représentatif des contraintes dans le plan  $\pi$  dans l'espace des contraintes principales. Il varie de  $-30^\circ$  pour le triaxial en compression ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) à  $+30^\circ$  dans le triaxial en traction).

### 6.3. TYPES DE MODÈLES RHÉOLOGIQUES

Les modèles rhéologiques peuvent être classés en élastiques linéaires, élastiques non linéaires et élasto-plastiques. Cette classification est dans l'ordre croissant des possibilités théoriques. On peut dire que, d'une certaine façon, cet ordre est celui de la complexité croissante des modèles, mais ceci dépend des points de vue. Ainsi un modèle élastique non linéaire peut être considéré comme une succession de morceaux de calculs élastiques linéaires dans lesquels on fait varier les modules d'Young et les coefficients de Poisson en fonction du niveau de contrainte. Il est nécessaire d'avoir une certaine connaissance de la théorie de la plasticité pour bien comprendre les modèles élasto-plastiques; c'est pourquoi ils peuvent être la pierre d'achoppement de beaucoup de praticiens qui n'ont pas le temps d'acquérir ces connaissances théoriques. Si l'on considère la facilité de mise en oeuvre des modèles, l'ordre n'est pas forcément celui exposé ci-dessus. Les modèles élasto-plastiques peuvent être aussi faciles à mettre en oeuvre que les modèles élastiques non linéaires. Si on prend un cas extrême, et si on mesure la facilité de mise en oeuvre par le nombre de paramètres à définir, l'ordre des modèles peut même être inversé: ainsi un modèle élastique linéaire anisotrope assez général demande 21 paramètres indépendants, le modèle élastique hyperbolique 9 paramètres, et un modèle élasto-plastique aussi peu que 3 paramètres (par exemple Tresca, en plasticité parfaite).

---

(\*) Il y a un regrettable manque d'unanimité dans le choix des notations. Ainsi, l'École de Cambridge (Angleterre) utilise  $s$  pour  $\sigma_s$ ,  $t$  pour  $1/2\sigma_d$ ,  $p$  pour  $\sigma_m$  et  $q$  pour  $\sigma_q$ ; alors que Lambe et Whitman (1969) ont utilisé  $p$  pour  $\sigma_s$  et  $q$  pour  $1/2\sigma_d$ .

For soil models incorporating a Mohr-Coulomb yield criterion, it is particularly convenient to work in terms of invariants which do not involve the intermediate principal stress,  $\sigma_2$  (simply because the Mohr-Coulomb criterion does not involve  $\sigma_2$ ). Two used in the formulation of some of the stress-strain laws described below are the plane strain mean stress,  $\sigma_s$ , and the deviator stress,  $\sigma_d$ :

$$\sigma_s = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (6.1)$$

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.2)$$

There are useful alternative definitions (similar both qualitatively and quantitatively) to the octahedral mean and deviator stress measures(\*):

$$\sigma_m = \sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (6.3)$$

$$\sigma_q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{oct}} = \sqrt{3} J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (6.4)$$

(Note that for the triaxial test case:  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\sigma_q = \sigma_d$ ).

$\sigma_s$  and  $\sigma_d$  are particularly convenient for plane strain applications where the out-of-plane stress need not be involved at all in the modelling. A little care is however necessary in relating them to the ubiquitous axi-symmetric tests. They may also be used for axi-symmetric and three-dimensional applications (incorporating a Mohr-Coulomb criterion) although it is more common here to use  $\sigma_m$  and  $\sigma_q$  (or  $\tau_{\text{oct}}$ ), and sometimes a third variant expressed by  $J_3$  or the Lode angle.

(The Lode angle,  $\theta$ , specifies the orientation of the stress point in the  $\pi$  plane in principal stress space. It varies from  $-30^\circ$  for the triaxial compression test stress condition ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) to  $+30^\circ$  for the triaxial extension test).

### 6.3. TYPES OF MODEL

These divide broadly into linear elastic, non-linear (variable) elastic, and elasto-plastic. These classifications are in increasing order of theoretical potential. Although in some respects the order reflects the complexity of the models this depends on the view point. Thus a variable elastic model can be conceived simply as a sequence of piece-wise linear elastic analyses in which the Young's modulus and Poisson's ratio are varied according to the stress level. Elasto-plastic models require some knowledge of plasticity theory for their understanding, and this will be a stumbling block to many practitioners who do not have the time to acquire this knowledge. As regards the ease of application of the model the order is not necessarily as above. Elasto-plastic models can be just as easy to apply as variable elastic. To take an extreme case the ease of application as measured by the number of parameters to be defined may be reversed: thus a quite general anisotropic linear elastic model would have 21 independent parameters, the hyperbolic variable elastic model might have 9, and an elasto-plastic model as few as 3 (e.g. Tresca, perfectly plastic).

---

(\*) There is an unfortunate lack of unanimity on symbols for these measures. Thus the Cambridge (England) school have used  $s$  for  $\sigma_s$ ,  $t$  for  $1/2\sigma_d$ ,  $p$  for  $\sigma_m$  and  $q$  for  $\sigma_q$ ; whereas Lambe and Whitman (1969) have used  $p$  for  $\sigma_s$  and  $q$  for  $1/2\sigma_d$ .

---

### Modèles élastiques linéaires.

Le plus largement utilisé est le modèle élastique isotrope, défini par deux paramètres: le module d'Young  $E$  (ou  $E'$ ) et le coefficient de Poisson  $\nu$  (ou  $\nu'$ ). Le prime est utilisé pour distinguer les paramètres de la loi en contraintes effectives. Comme les propriétés des sols entraînent naturellement la distinction entre effets volumiques et effets de cisaillement (voir 1 dans le §.6.1., ci-dessus), il est souvent pratique de définir le modèle en termes de module de cisaillement  $G$  (ou  $G'$ ) et module de compressibilité volumique  $K$  (ou  $K'$ ). Ces paramètres sont liés à  $E$  et  $\nu$  par:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.5)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (6.6)$$

Les mêmes expressions, avec des primes, s'appliquent aux paramètres en contraintes effectives. Noter que  $G = G'$ .

En effectuant les calculs en non-drainé en termes de contraintes effectives, en suivant la technique exposée au §.4.2., on peut aussi définir un module équivalent de pression interstitielle  $K_f$ . On obtiendra précisément les mêmes déplacements avec un calcul en contraintes effectives utilisant  $G'$ ,  $K'$  et  $K_f$  qu'avec un calcul en contraintes totales utilisant  $G = G'$  et  $K = K' + K_f$ .

$K_f$  peut être relié au coefficient  $B$  de pression interstitielle de Skempton. Dans les conditions du triaxial ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), on peut montrer que (cf. §.3.2.1. de Naylor et al., 1981):

$$K_f = \frac{K'B}{1 - B} \quad (6.7)$$

Pour les sols saturés (comme les noyaux argileux de certains barrages en remblai)  $B$  approche l'unité et  $K_f$  devient grand (peut-être proche du module de compressibilité de l'eau: environ 2000 MPa[\*]).

Parmi tous les degrés d'anisotropie, jusqu'au cas le plus compliqué qui comporte 21 paramètres indépendants, seule l'orthotropie — ou cas du dépôt stratifié — demandant 5 paramètres, a de l'intérêt dans les calculs de mécanique des sols. Si on note par l'indice « v » ce qui se rapporte à la direction verticale, et par « h » l'horizontale, les paramètres sont:  $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$ ,  $\nu_{hh}$ ,  $G_{vh}$ . Gazetas (1981) recommande d'utiliser la relation de Carrier (1946) permettant d'exprimer  $G_{vh}$  en fonction des quatre autres paramètres. La valeur ainsi obtenue est en bon accord avec les valeurs mesurées. Cependant, le modèle anisotrope n'a pas eu beaucoup d'applications dans le domaine des barrages en terre.

Un modèle élastique linéaire ne répond pas aux six exigences exprimées au §.6.1., sauf les versions anisotropes qui peuvent, en principe, satisfaire la sixième.

### Modèles élastiques non-linéaires.

Ceux-ci se divisent en modèles multi-linéaires (où les courbes contraintes-déformations consistent en des séries de segments de droites) et en modèles élastiques continuellement variables. Dans la première catégorie, la forme la plus simple est le modèle bi-linéaire, avec un couple de constantes élastiques pour le domaine précédant la rupture, et un autre couple au-delà. Dans la plupart de ces modèles — et dans tous ceux qui sont considérés ici — on suppose que la non-linéarité est dépendante des contraintes (totales ou effectives). Ceci veut dire que les modules tangents dépendent uniquement de l'état de contrainte, sauf dans les modèles plus perfectionnés, pour le cas du raidissement au déchargement.

---

[\*] On utilise ici les unités du Système International (SI):  
MPa = MN/m<sup>2</sup> ; kPa = kN/m<sup>2</sup> ; etc...

### Linear elastic models.

Most widely used is the isotropic elastic model defined by the two parameters: Young's modulus,  $E$  (or  $E'$ ), and Poisson's ratio,  $\nu$  (or  $\nu'$ ), the prime being used to indicate that the parameters relate effective stress to strain. As the properties of soil divide naturally into shear and bulk effects (Requirement 1 in 6.1. above) it is often convenient to define the model in terms of shear modulus,  $G$  (or  $G'$ ), and bulk modulus,  $K$  (or  $K'$ ). These are related to  $E$  and  $\nu$  as follows:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.5)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (6.6)$$

The same expressions with primes added apply to the effective stress parameters. Note that  $G = G'$ .

In carrying out undrained analyses in terms of effective stress by the technique outlined in section 4.2. above, an equivalent pore fluid bulk modulus  $K_f$  is also specified. Precisely identical displacements will then be obtained from an effective stress analysis using  $G'$ ,  $K'$  and  $K_f$  as with a total stress analysis using  $G = G'$  and  $K = K' + K_f$ .

$K_f$  can be related to Skempton's pore pressure parameter «  $B$  ». For triaxial test conditions ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) it can be shown (see section 3.2.1. of Naylor *et al.*, 1981) that:

$$K_f = \frac{K'B}{1 - B} \quad (6.7)$$

For saturated soils (as in the clay cores of some fill dams)  $B$  approaches 1 and  $K_f$  becomes large (perhaps approximating the bulk modulus of water of about 2000 MPa[\*]).

Of the various degrees of anisotropy culminating in the most general case which has 21 independent parameters, only the transversely isotropic or *stratified* deposit case having 5 parameters appears to be of interest in soil mechanics analysis. Identifying the vertical direction by the suffix «  $v$  » and the horizontal by «  $h$  », the parameters are:  $E_v$ ,  $E_h$ ,  $\nu_{vh}$ ,  $\nu_{hh}$ ,  $G_{vh}$ . Gazetas (1981) recommends the use of a relationship due to Carrier (1946) which relates  $G_{vh}$  to the other four. The value thus obtained is claimed to be in good agreement with measured values. The anisotropic model has not, however, had much application in fill dam analysis.

A linear elastic model cannot incorporate any of the six requirements listed in 6.1. above except that anisotropic versions can, in principle, accommodate the sixth.

### Non-linear (variable) elastic models.

These divide into multi-linear models in which the stress-strain curve consists of a series of straight line segments, and continuously variable elastic models. The simplest form of the former is the bi-linear model with a pair of elastic constants defining pre-yield behaviour and another pair for post-yield. In most of these models — and in all those considered here — the non-linearity is assumed to be stress (total or effective) dependent. This means that tangential elastic moduli are uniquely dependent on the stress state except for provision in the more sophisticated versions for increasing the stiffness on unloading.

---

[\*] Standard International (SI) units are used:  
MPa = MN/m<sup>2</sup> ; kPa = kN/m<sup>2</sup> ; etc.

Naylor et al. (1981) ont proposé une forme de modèle bi-linéaire dans lequel on garde, dans les deux domaines, le même module de compressibilité volumique (ou bien le même module de compressibilité en déformation plane  $K = K + 1/3G$ , ce qui revient au même en pratique) et dans lequel le module de cisaillement tangent diminue très vite quand le critère de Mohr-Coulomb est atteint. Ceci fait que le coefficient de Poisson tangent saute de sa valeur avant rupture à une valeur proche de 0.5 à la rupture. Le modèle est défini par  $E$ ,  $\nu$ ,  $c$  et  $\phi$ . Exactement les mêmes paramètres seraient nécessaires pour un calcul élasto-plastique en Mohr-Coulomb. Comme dans le modèle élasto-plastique, le modèle bi-linéaire peut utiliser sa rigidité initiale ( $E, \nu$ ) pour le déchargement.

Un grand nombre de modèles multi-linéaires et continuellement variables ont été utilisés dans des calculs de barrages en remblai. Clough et Woodward (1967) ont ouvert cette voie par leur calcul de la construction du barrage Otter Brook. Leur modèle supposait un module de compressibilité volumique constant mais utilisait un module de cisaillement variable avec le déviateur et la contrainte moyenne; Le modèle bi-linéaire décrit ci-dessus est semblable mais ne permet pas à  $G$  de varier avec la contrainte moyenne. Ceci est une limitation significative.

Une autre approche a été de classifier les modules tangents en fonction du niveau de contrainte et d'utiliser les valeurs appropriées aux différentes étapes de calcul. Cette méthode a été employée par Skermer (1973) dans son étude du barrage d'El Infiernillo, ainsi que par Eisenstein et Simmons (1975) dans leurs calculs bi- et tridimensionnels du barrage de Mica. Elle peut être utilisée pour rendre un calcul de construction couche par couche effectivement non-linéaire, en donnant à chaque couche un jeu différent de paramètres à chaque étape du calcul. L'inconvénient est le nombre de jeux de paramètres nécessaires. Ce défaut peut être annulé en exprimant les modules comme fonctions analytiques des contraintes (ou généralement des invariants de contrainte) et en s'arrangeant pour que le programme les calcule pour des incréments de charge judicieusement choisis. Ceci forme la base des vrais modèles à élasticité variable, dont on va présenter deux exemples ci-dessous: le modèle *hyperbolique* et le modèle *K-G*.

On attribue la première utilisation du modèle hyperbolique à Kondner (1963). Il fut appliqué à un remblai stratifié par Kulhawy et al. (1969). Ensuite, le modèle fut développé par Duncan et Chang (1970). Ces caractéristiques essentielles sont illustrées par la Fig. 6.2. Le point de départ est la relation hyperbolique entre les contraintes et les déformations, sous la forme:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1} \quad (6.8)$$

«  $a$  » est l'inverse du module tangent initial  $E_1$  (à déviateur nul). Pour respecter le fait que la raideur augmente avec la contrainte moyenne (voir 1 dans §. 6.1.),  $E_1$  est exprimé en fonction de deux paramètres  $K$  et  $n$ , selon la relation proposée par Janbu (1963):

$$E_1 = K \frac{p_a}{a} \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6.9)$$

$p_a$  est la pression atmosphérique (introduite ici pour rendre  $K$  adimensionnel). Des améliorations de ce modèle permettent de couper la courbe contraintes-déformations pour une valeur du déviateur inférieure à la valeur asymptotique  $1/b$ , et aussi de faire varier  $b$  avec le niveau de contrainte. Seed et al. (1975) décrivent une version de ce modèle adaptée au calcul des barrages, et demandant 9 paramètres. Voir aussi Wong et Duncan (1974). Dans leur calcul du barrage d'Oroville, Kulhawy et Duncan (1972) ont utilisé une version à 8 paramètres.

Le modèle *K-G* proposé par Naylor (1978) peut remplacer le modèle hyperbolique. Il a les mêmes possibilités théoriques mais il n'a pas, à ce jour, été beaucoup utilisé. Ce modèle est une simplification de celui proposé par Nelson et Baron (1971), la simplification étant d'enlever la dépendance explicite de la rigidité et de l'indice des vides. Dans ce modèle, le module tangent de compressibilité

A form of bi-linear model proposed by Naylor *et al.* (1981) retains the same bulk modulus through (or alternatively the *plane strain bulk modulus*  $\bar{K} = K + 1/3G$  which makes little difference in practice) and arranges for the tangential shear modulus to drop to a small value when a Mohr-Coulomb yield criterion is reached. This effectively causes the tangential Poisson's ratio to jump from its pre-yield value to a value close to 0.5 on yield. The model is defined by  $E$ ,  $\nu$ ,  $c$  and  $\phi$ . Precisely the same parameters would be needed for an elasto-plastic Mohr-Coulomb analysis. As with the elasto-plastic model the bi-linear model can be made to retain its initial stiffness ( $E, \nu$ ) on unloading.

A number of variations of multi-linear, and continuously variable elastic models have been used in the analysis of fill dams. Clough and Woodward (1967) pioneered these in their analysis of the construction of Otter Brook Dam. Their model assumed a constant bulk modulus but used a shear modulus which varied with the deviator and mean stress. The bi-linear model described above is similar to this but it does not allow  $G$  to vary with mean stress. This is a significant limitation.

Another approach has been to tabulate the tangential moduli according to the stress level and to use the appropriate values in the different stages of the analysis. Skermer (1973) did this in his study of El Infiernillo Dam, as also Eisenstein and Simmons (1975) in their two and three dimensional analyses of Mica Dam. This method can be used to make a sequence of linear layered analyses effectively non-linear by assigning a separate set of parameters to each layer in each analysis. The drawback is that a large number of sets of parameters are required. This drawback may be overcome by expressing the moduli as analytical functions of stress (usually the stress invariants) and arranging for the computer to evaluate them at suitably spaced loading increments. This forms the basis of the truly variable elasticity models two of which (the *hyperbolic* and the *K-G*) are considered here.

The hyperbolic model was attributed in the first instance to Kondner (1963). It was applied to layered fills by Kulhawy *et al.* (1969). The model was subsequently developed by Duncan and Chang (1970). Its essential features are illustrated in Fig. 6.2. The starting point is the hyperbolic relation between stress and strain of the form:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1} \quad (6.8)$$

«  $a$  » is the inverse of an initial (zero deviator stress) tangential modulus ( $E_t$ ). To incorporate the requirement (1. in 6.1. above) that stiffness increases with all round stress level,  $E_t$  is expressed in terms of two material properties  $K$  and  $n$  according to the following relationship, which was proposed by Janbu (1963):

$$E_t = K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6.9)$$

$p_a$  is the atmospheric pressure (introduced to make  $K$  dimensionless). Refinements to the model make the stress-strain curve *cut-off* at a deviator stress less than the asymptotic value of  $1/b$ , and make  $b$  also a function of stress level. A version of the model suitable for dam analysis is described by Seed *et al.* (1975). This requires 9 parameters to define it. See also Wong and Duncan (1974). A version requiring 8 parameters was used by Kulhawy and Duncan (1972) in their analysis of Oroville Dam.

An alternative to the hyperbolic model which has similar theoretical potential but of which there is, to date, limited experience is the *K-G* model proposed by Naylor (1978). This model is a simplification of that proposed by Nelson and Baron (1971), the simplification being to remove an explicit dependence of stiffness on voids ratio. The model makes the bulk and shear tangential moduli linear functions of mean and

volumique et le module tangent de cisaillement sont des fonctions linéaires du déviateur et de la contrainte moyenne (les deux premiers invariants), en contraintes totales ou effectives. La version incluant le critère de Mohr-Coulomb définit K et G ainsi:

$$K = K_1 + \alpha_K \sigma_s \quad (6.10)$$

$$G = G_1 + \alpha_G \sigma_s + \beta_G \sigma_d \quad (6.11)$$

$K_1$ ,  $G_1$ ,  $\alpha_K$ ,  $\alpha_G$ ,  $\beta_G$  sont des constantes du matériau ( $\beta_G$  est négatif) et  $\sigma_s$  et  $\sigma_d$  sont définis par les équations (6.1) et (6.2), en général en contraintes effectives.

La mise en plasticité se produit quand  $G = 0$ . En portant cette valeur dans les équations et en comparant avec les conditions de Mohr-Coulomb sous la forme:

$$0 = 2c \cos \phi + 2 \sin \phi \sigma_s - \sigma_d \quad (6.12)$$

on obtient: 
$$\frac{G_1}{-\beta_G} = 2c \cos \phi \quad (6.13)$$

et: 
$$\frac{\alpha_G}{-\beta_G} = 2 \sin \phi \quad (6.14)$$

Si on peut donner des valeurs à  $c$  et  $\phi$ , les équations (6.13) et (6.14) permettent de réduire le nombre de paramètres de 5 à 3. La procédure recommandée pour déterminer ces paramètres est de noter tout d'abord que  $\beta_G$  règle l'échelle de la courbe déviateur de contrainte-déviateur de déformation dans la direction des déformations. On donne au début une valeur arbitraire à  $\beta_G$  (-100 par exemple).  $G_1$  et  $\alpha_G$  sont alors déterminés par (6.13) et (6.14).  $\beta_G$  peut être alors modifié, ainsi que  $G_1$  et  $\alpha_G$  jusqu'à ce que la relation contrainte-déformation désirée soit obtenue. La détermination de  $K_1$  et  $\alpha_K$  est une opération séparée et peut être fondée sur des essais oedométriques ou triaxiaux (voir §.6.4.).

Le modèle bi-linéaire décrit ci-dessus respecte les conditions requises  $n^02$  et 3 sur les six décrites au paragraphe 6.1. Le modèle hyperbolique respecte les  $n^01$  et 3 et les versions évoluées respectent de plus la condition  $n^02$  (Seed et al., 1975). Le modèle K-G respecte les conditions  $n^01$  et 3 et pourrait être amélioré pour respecter la  $n^02$ .

#### Modèles élasto-plastiques.

Ils peuvent être divisés en deux grandes classes: ceux avec une surface intrinsèque *ouverte* et ceux avec une surface intrinsèque *fermée*. Parmi les premiers, les principaux sont les modèles de Mohr-Coulomb et de Von Mises étendu, ainsi que leurs cas particuliers à frottement nul, c'est-à-dire Tresca et Von Mises. La seconde catégorie comprend les modèles d'état critique ou modèles *cap*. Les deux catégories sont illustrées sur la Fig. 6.3. En remplaçant les axes  $\sigma_s$  et  $\sigma_d$  par la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et le déviateur  $\sigma_q$  [équations (6.3) et (6.4)] on change le seuil de la Fig. 6.3a. en celui de Von Mises étendu et celui de la Fig. 6.3b. en la forme « p-q » du modèle de l'état critique (c'est-à-dire celui développé par l'école de Cambridge. Schofield et Wroth, 1968).

La principale différence entre les modèles à seuil ouvert et ceux à seuil fermé est que, pour les premiers, le seuil ne peut être atteint que par un accroissement du déviateur de contrainte, alors que pour les seconds, le seuil peut être atteint à la fois par déviateur et contrainte isotrope. Les premiers peuvent donc convenir pour des sols dans lesquels les effets volumiques sont mineurs, comme les sables denses ou les enrochements à granulométrie étalée. Les modèles de la seconde catégorie sont particulièrement adaptés pour les argiles peu ou normalement consolidées, dans lesquelles de fortes déformations volumiques peuvent se produire sous chargement drainé. Ils peuvent être utilement appliqués aux noyaux d'argile molle. Selon le détail

deviator stress invariants (either total or effective stress). The stress measures may be chosen to suit the yield criterion to be incorporated. The version incorporating the Mohr-Coulomb yield criterion defines K and G as follows:

$$K = K_1 + \alpha_K \sigma_s \quad (6.10)$$

$$G = G_1 + \alpha_G \sigma_s + \beta_G \sigma_d \quad (6.11)$$

$K_1$ ,  $G_1$ ,  $\alpha_K$ ,  $\alpha_G$ ,  $\beta_G$  are material constants ( $\beta_G$  is negative), and  $\sigma_s$  and  $\sigma_d$  are as defined by equations (6.1) and (6.2) and are usually effective stresses.

Yielding occurs when  $G = 0$ . Putting in this condition and comparing eq. 6.11 with the Mohr-Coulomb yield condition in the form:

$$0 = 2c \cos \phi + 2 \sin \phi \sigma_s - \sigma_d \quad (6.12)$$

one obtains: 
$$\frac{G_1}{-\beta_G} = 2c \cos \phi \quad (6.13)$$

and: 
$$\frac{\alpha_G}{-\beta_G} = 2 \sin \phi \quad (6.14)$$

If values can be assigned to  $c$  and  $\phi$  then the number of parameter values to be determined reduces from 5 to 3 by means of the constraints (6.13) and (6.14). A recommended procedure for obtaining them is to first note that  $\beta_G$  controls the scale of the deviator stress-deviator strain curve in the strain direction. To start, an arbitrary value, say -100, is assigned to  $\beta_G$ .  $G_1$  and  $\alpha_G$  are then found from (6.13) and (6.14).  $\beta_G$  can then be altered,  $G_1$  and  $\alpha_G$  being changed in proportion until the desired stress-strain fit is achieved. The determination of  $K_1$  and  $\alpha_K$  is a separate operation and may be based on oedometer or triaxial compression tests (see 6.4. below).

The bi-linear model described incorporates requirements 2. and 3. of the six listed in section 6.1. The hyperbolic model incorporates 1. and 3. with the more sophisticated versions including 2. (Seed *et al.*, 1975). The K-G model incorporates 1. and 3. and could be extended to include 2.

#### Elasto-plastic models.

These may be divided into two main classes: those with an *open* yield surface and those with a *closed* yield surface. Principal among the former are the Mohr-Coulomb and extended Von Mises, and their special cases for zero friction, *i.e.* Tresca et Von Mises. The second category covers the Critical State or *cap* class of models. The two are illustrated in Fig. 6.3. Replacing the  $\sigma_s$  and  $\sigma_d$  axes by the mean stress  $\sigma_m$  and the deviatoric stress measure  $\sigma_q$  [equations (6.3) and (6.4)] changes the yield surface of Fig. 6.3a. to the extended Von Mises and Fig. 6.3b. to the « p-q » form of the Critical State model (*i.e.* as developed by the Cambridge School, Schofield and Wroth, 1968).

The main difference between the open and closed yield surface categories is that with the former yielding only occurs on increasing deviator stress whereas with the latter both volumetric and deviatoric yielding can take place. The former may therefore be suitable for modelling soils where volumetric effects are relatively minor, such as dense sand or well graded rockfills. The latter is particularly suitable for normally or lightly consolidated clays where large volumetric strains can occur under drained loading. It might usefully be applied to soft clay cores. Depending on the detail of the left hand part of the yield surface (Fig. 6.3b.), a Critical State model can incorporate



de la partie gauche d'un seuil fermé (Fig. 6.3b.), un modèle d'état critique peut inclure les caractéristiques d'un seuil ouvert (par exemple Mohr-Coulomb), pour la mise en plasticité des sols surconsolidés, tout en gardant les propriétés de mise en plasticité par déformation volumique, pour les sols normalement consolidés. Ceci est illustré par la ligne marquée (ii) dans la Fig. 6.3b.

La caractéristique principale des modèles élasto-plastiques, celle qui les distingue des modèles élastiques variables, est l'inclusion d'une loi d'écoulement. Celle-ci règle la valeur des incréments de déformation (illustrés par les flèches en tireté sur la Fig. 6.3a.). La flèche (i) montre une loi d'écoulement associée, normale à la surface du seuil, ce qui produit une dilatation volumique ( $\epsilon_v^p$  négative) liée à une distorsion ( $\epsilon_d^p$  positive). Malheureusement, dans les matériaux avec frottement, une loi d'écoulement associée produit trop de dilatance. Ceci peut être contrôlé par l'utilisation d'une loi d'écoulement non-associée. La flèche (ii) montre une loi non-associée, parallèle à l'axe  $\sigma_d$ , qui ne produit donc que de la distorsion, sans variation de volume. Dans les modèles d'état critique, on a toujours une loi associée quand on atteint le seuil à droite du point C de la Fig. 6.3b. Dans la version (i), la loi associée est aussi valable à gauche du point C; alors que dans la version (ii), on peut avoir une loi non-associée pour laquelle la quantité de dilatation (réglée par l'inclinaison de la flèche de la loi d'écoulement) est nulle à l'état critique (point C) et s'accroît quand la contrainte moyenne effective diminue. Une caractéristique importante des modèles d'état critique est qu'ils prédisent tous une variation volumique incrémentale nulle à l'état critique.

La loi d'écoulement permet de prendre en compte la dilatance (condition 5 du §.6.1.) particulièrement avec une loi d'écoulement non-associée. Cependant, l'utilisation d'une loi d'écoulement non-associée peut causer des difficultés numériques. Par exemple, avec des programmes utilisant une méthode de raideur tangente (c'est-à-dire qu'on recalcule la matrice de rigidité pour chaque incrément de charge), on a besoin d'un processus de résolution non-symétrique et ceci peut tripler la durée de résolution. D'autres méthodes, basées sur des procédures itératives (des méthodes de *contraintes initiales*) ne demandent pas de recalculer et d'assembler des matrices élémentaires, mais sont quelquefois plus lentes à converger. Cependant, de nombreux calculs, avec des lois d'écoulement non-associées, ont déjà été réalisés (essentiellement dans des organismes de recherche).

Un autre avantage des modèles élasto-plastiques par rapport aux modèles élastiques variables est qu'au déchargement, ils reprennent automatiquement la rigidité élastique — plus forte. Bien que, comme on l'a dit, ceci puisse être fait avec les modèles élastiques variables, ce n'est pas une de leurs propriétés intrinsèques.

A part leurs relatifs avantages d'être capables de représenter la dilatance et de suivre des chemins de déchargement, y a-t-il d'autres bonnes raisons pour préférer les modèles élasto-plastiques dans les calculs de barrages en remblai? La réponse n'est pas facile et dépend de la signification pratique des différences subtiles qui existent entre les modèles dans la régulation des *chemins* suivis pendant le chargement (c'est-à-dire chemins de contraintes ou chemins de chargement-déformation). Supposons qu'on effectue un calcul d'abord en élastique non-linéaire puis en élasto-plastique, en prenant des modèles aussi équivalents que possible. Par exemple, si on doit faire un calcul en contraintes totales d'une argile saturée, on prendra les mêmes  $E$ ,  $\nu$  et  $c$  pour définir à la fois un modèle élastique bi-linéaire (comme décrit ci-dessus) et un modèle élasto-plastique Tresca. Les deux calculs donneront les mêmes résultats jusqu'à ce qu'on atteigne le seuil (si le problème est le chargement de l'argile par une semelle rigide, le seuil sera très rapidement atteint sous les bords de la semelle). Si le chargement est poursuivi jusqu'à la ruine, on trouvera des charges maximales identiques. Cependant, entre les deux, on peut s'attendre à ce que les chemins de contraintes soient différents.

La différence vient de la façon de calculer les incréments de déformation. Dans les modèles à plasticité, les composantes plastiques des déformations (qui sont prépondérantes quand on a atteint le seuil) sont réglées par la loi d'écoulement qui à son tour est réglée par les contraintes *cumulées*. Par contre, dans les modèles élastiques non-linéaires, les incréments de déformation sont réglés par *incrément* de

the characteristics of an open yield surface, e.g. Mohr-Coulomb, for yielding of over-consolidated soils while retaining the volumetric yield properties for normally consolidated soil. This is illustrated by the line marked (ii) in Fig. 6.3b.

A key feature of elasto-plastic models which distinguishes them from variable elastic is their incorporation of a flow rule. This controls the relative magnitudes of the strain increment components. It is illustrated in Fig. 6.3a. by the broken arrows. Arrow (i) shows an **associated** flow rule normal to the yield surface. This causes volumetric expansion ( $\epsilon_v^p$  negative) to be linked to distortion ( $\epsilon_d^p$  positive), i.e. it causes dilatancy. Unfortunately, for frictional materials too much dilatancy results from use of an associative flow rule. This can be overcome by the use of a non-associative rule. Arrow (ii) shows a non-associated flow rule which, since it is parallel to the  $\sigma_d$  axis, will cause distortion without volume change. The Critical State model invariably have an associated flow rule for yielding to the right of point C in Fig. 6.3b. Version (i) will continue the association to the left whereas version (ii) may have a non-associative flow with the amount of dilatancy (controlled by the inclination of the flow rule arrow) equal to zero at the critical state point (point C) and increasing as the mean effective stress reduces. An important feature of Critical State models is that they all predict zero incremental volume change at the critical state.

The flow rule, particularly if it is non-associative, allows the model to incorporate dilatancy (requirement 5 of section 6.1.). The use of a non-associative flow rule can, however, cause computing difficulties. For instance, with programs using the tangential stiffness method (i.e. which recalculate the stiffness matrix for each load increment) a non-symmetric solver is needed, and this may triple the solution time. Alternative methods, based on iterative procedures (*initial stress* type methods) which do not require the recalculation and assembly of the element stiffnesses, are liable to take longer to converge. Notwithstanding this, a large number of analyses incorporating a non-associative rule have been successfully carried out (mainly at research institutions).

Another advantage elasto-plastic models have over variable elastic is that they automatically cause the stiffness to revert to its relatively high elastic value on unloading from the yield surface. Although (as has been stated) this can be done with the variable elastic models it is not an inherent property of those models.

Apart from the relative advantages of being able to model dilatancy and follow unloading stress paths is there any other reason for preferring elasto-plastic models to variable elastic, particularly for application to fill dams? The answer is not simple and depends on the practical significance of a subtle difference in the models which controls the *paths* (i.e. stress paths or load-deformation paths) followed during loading. Suppose a finite element analysis is carried out using first a variable elastic and then an elasto-plastic model. The two models are made as near equivalent as possible. For example, if a total stress analysis of a saturated clay is to be done the same  $E$ ,  $\nu$  and  $c$  may be used to define both a bi-linear elastic model (as described above) and a Tresca elasto-plastic model. Both analyses will give identical results until yield first commences (if the problem is loading of clay by a rigid footing this will occur early in the analysis below the footing corner). If loading is continued to ultimate collapse identical collapse loads will be predicted. In between, however, the paths can be expected to be different.

The reason for the difference is due to the different ways in which the relative proportions of the strain increment are determined. In the plasticity models their plastic components (and these will dominate when there is yielding) are controlled by the flow rule which in turn is controlled by the **accumulated** stress. The variable elastic models on the other hand have their strain increments controlled by the stress

contrainte. S'il n'y a pas de rotation des contraintes principales, comme par exemple dans un essai triaxial, les deux réponses seront identiques car les directions des contraintes et déformations principales cumulées et incrémentales coïncident toujours. Mais en général, ce n'est pas le cas, on sait peu de choses sur l'ampleur de la différence. On croit, et ceci est renforcé par des recherches expérimentales, par exemple Wood (1975), que la réponse élasto-plastique est plus proche de la réalité.

Au vu de tout ce qui précède, on peut penser qu'il est tout à fait préférable d'employer les modèles élasto-plastiques plutôt que les modèles élastiques variables, bien que les premiers n'aient eu encore que peu d'applications dans le calcul des barrages en remblai. Smith et Hobbs (1974) ont utilisé un modèle Von Mises plastique parfait pour calculer des essais centrifuges sur des talus théoriques et deux barrages en remblai. Cathie et Dungar (1978) ont aussi utilisé un modèle élasto-plastique parfait pour l'analyse *a posteriori* du barrage de Llyn Brianne avec Von Mises pour le noyau et Von Mises étendu pour les recharges, ils ont aussi effectué des calculs en élastique linéaire et en élastique non-linéaire (modèle hyperbolique). Naylor (1982) a utilisé un modèle Tresca pour l'étude de la ruine d'un remblai d'argile sur une fondation d'argile. Naylor (1975) a utilisé un modèle d'état critique pour le calcul d'un barrage théorique à noyau central, qu'il a comparé avec des modèles élastiques non-linéaires. (Les comparaisons entre les modèles de Cathie et Dungar, 1978, et Naylor, 1975, seront examinées brièvement au §.6.5.).

Une autre considération importante dans le choix des modèles rhéologiques est le nombre et le type des paramètres nécessaires. Les modèles plastiques les plus simples sont attrayants car, comme on l'a vu, ils ne demandent que 3 paramètres pour un calcul en contraintes totales d'un matériau sans frottement. Les matériaux avec frottement en demandent un de plus, par exemple  $\phi$ , en plus de  $E$ ,  $\nu$  et  $c$  pour Mohr-Coulomb. Les modèles *cap* sont à écrouissage positif et demandent un total de 5 paramètres dans les versions les plus simples: 2 paramètres élastiques, un angle de frottement, une mesure de la rigidité de compressibilité volumique plastique (liée aux indices de compression et de gonflement  $C_c$  et  $C_s$ ) et une pression de pré-consolidation pour définir la valeur de la surconsolidation initiale. (Pour des détails sur le modèle d'état critique, le lecteur se reportera au texte original de Schofield et Wroth, 1968, à celui d'Atkinson et Bransby, 1978, et au chapitre 7 de Naylor et al., 1981).

Les modèles précités ne tiennent pas compte explicitement des effets du temps résultant du fluage (*i.e.* effets du temps autres que la dissipation des pressions interstitielles qui peut être traitée par un calcul approprié en contraintes effectives). Aussi sera-t-il fait mention brièvement des modèles de la classe visco-plastique. Dans sa forme uni-dimensionnelle la plus simple, un amortisseur est placé en parallèle avec la partie glissante d'une modèle élasto-plastique comprenant un ressort et une partie glissante en série. Il en résulte que, lors de la première application de la charge, seules interviennent des déformations élastiques, toute déformation plastique (ou visqueuse) se produisant progressivement dans le temps. Un paramètre de viscosité simple intervient dans l'échelle des temps. Un fait important est que le modèle se prête à un calcul échelonné dans le temps, qui peut être stable (même s'il est relativement coûteux pour un maillage fin). C'est probablement la meilleure méthode pour aborder les difficiles analyses de l'adoucissement des déformations et de la rupture progressive. Dans l'application de la méthode, le paramètre de viscosité peut être soit réel, soit fictif. Dans ce dernier cas, la méthode peut être utilisée, pour les modèles élasto-plastiques. Le temps est alors un concept mathématique, le résultat intéressant étant une solution convergente quand celui-ci est *grand*, c'est-à-dire quand l'effet d'amortissement s'est dissipé. La méthode est décrite, dans ses généralités, par Zienkiewicz et Corneau (1974), et les conditions requises pour la stabilité sont données par Corneau (1975). En dehors de l'étude sur les talus, par Zienkiewicz et al., cité au chapitre 2.3., les auteurs n'ont pas eu connaissance d'applications de la méthode visco-plastique à des problèmes de barrages en remblai.

La considération finale est la facilité avec laquelle on peut intégrer ces modèles dans des programmes d'éléments finis, et les temps de calcul qu'ils entraînent. Il est très difficile de tirer des conclusions, car il y a beaucoup de facteurs, et qu'en particulier le temps de calcul est très sensible à l'étendue des zones en plasticité et à la précision requise. Cependant, on trouve généralement que les modèles comportant la

**Increment.** When there is no rotation of principal stress as in, say, a triaxial test the two responses will be the same because the accumulated and incremental principal stress and strain directions will all coincide. In general this is not the case. Little is known about the extent of the difference. It is believed, and this is supported by some experimental work, e.g. Wood (1975), that the elasto-plastic response is the most realistic.

In view of the above there would appear to be a strong case for using elasto-plastic in preference to variable elastic models yet there has been relatively little application to fill dams, but there has been some. Smith and Hobbs (1974) use a perfectly plastic Von Mises model to analyse centrifuge tests of idealized slopes and two embankment dams, and then repeated the analyses to model the building structures. Cathie and Dungar (1978). In a back analysis of Lyn Brianne dam, also used an elastic-perfectly plastic model. Von Mises was used for the core and extended Von Mises for the shell. They also did linear elastic and variable elastic (hyperbolic model) analyses. Naylor (1982) used a Tresca model for a collapse study of a clay embankment on a clay foundation. Naylor (1975) used a Critical State model in an analysis of a hypothetical central core dam which he compared with variable elastic models. (The comparisons between models done by Cathie and Dungar, 1978, and Naylor, 1975, will be considered briefly in section 6.5.).

Another important consideration in selecting the models is the number and type of parameters required in their definition. The simpler plasticity models are attractive requiring, as has been seen, only three when used for a total stress analysis of a frictionless material. The frictional models will require one more, e.g.  $\phi$  in addition to  $E$ ,  $\nu$  and  $c$  for the Mohr-Coulomb. The cap models are strain hardening and will require a total of 5 in the simpler versions. These are two elastic parameters, a friction angle, a measure of the plastic bulk stiffness (related to the compression and swelling indices  $C_c$  and  $C_s$ ) and the pre-consolidation pressure to define the extent of initial over consolidation. (For details of the Critical State model the reader is referred to the original text by Schofield and Wroth, 1968, that by Atkinson and Bransby, 1978, and chapter 7 of Naylor *et al.*, 1981).

The models referred to above do not explicitly take time effects due to creep into account (*i.e.* time effects other than the dissipation of excess pore pressure which can be handled by appropriate use of effective stress analysis). Mention should therefore briefly be made of the visco-plastic class of models. In its simplest one dimensional form a dashpot is put in parallel with the slider part of a basic elastic-plastic model comprising a spring and slider in series. Consequently on first application of load only elastic strains occur, any plastic (or viscous) strains occurring progressively as time elapses. A single viscosity parameter controls the time scale. An important feature of the model is that it lends itself to a time-stepping computing technique which can be inherently stable (if relatively expensive for fine meshes). This provides probably the best method for tackling the difficult analytical problems of strain softening and progressive failure. In applying the method the viscosity parameter may be either real or fictitious. The latter case allows the method to be used for ordinary elasto-plastic models. Time then is a mathematical concept the result of interest being a converged solution when this is *large*, *i.e.* when the dashpot effect has worn off. The method is described generally by Zienkiewicz and Cormeau (1974), and details of the requirements for stability by Cormeau (1975). Apart from the work on slopes by Zienkiewicz *et al.*, referred to in 2.3. above, the writers are not aware of applications of the visco-plastic method to problems of embankment dams.

A final consideration is the ease with which the models can be incorporated in finite element programs and the computing time involved in using them. It is very difficult to draw conclusions here as there are so many factors, in particular the computing time is very sensitive to the extent of yielding (this is related to the safety factor) and the precision required. Generally, however, it is found that models

plasticité parfaite ( $\phi=0$ , sans écrouissage ni positif, ni négatif) sont les plus agréables à appliquer. Si l'on introduit le frottement, et en particulier avec une loi d'écoulement non-associée, il est probable qu'on augmentera le coût des calculs. Le coût augmentera rapidement aussi quand on réduit le coefficient de sécurité (avec des procédures itératives), bien que l'augmentation soit plus faible si on emploie une résolution tangentielle. La classe de modèles la plus difficile est celle qui inclut l'écrouissage négatif. Ceci peut se produire avec le modèle d'état critique quand le seuil est atteint à gauche du point C de la Fig. 6.3b., ce qui rend ce modèle particulièrement délicat. On a montré qu'il converge lentement avec des schémas itératifs et qu'il est vulnérable à des schémas tangentiels. Naylor (1983) a proposé une modification du modèle pour le rendre plus solide, et les travaux préliminaires s'y rapportant sont encourageants.

Le calcul des barrages, qui fait intervenir un chargement de poids propre à partir d'un état initial sans contrainte, puis un chargement à coefficient de sécurité relativement faible (causant typiquement une large mise en plasticité du noyau), suivi de la mise en eau (causant un déchargement et souvent quelques zones de traction) est un test difficile pour un programme d'éléments finis. La possibilité d'utiliser les modèles rhéologiques les plus perfectionnés doit être pondérée par les avantages qu'on peut espérer en tirer.

#### 6.4. PARAMÈTRES DES MATÉRIAUX

La sélection des paramètres des matériaux est évidemment d'une grande importance, qui peut même dépasser celle du choix du modèles lui-même.

On s'intéresse ici uniquement à la détermination des deux modules élastiques, soit pour un modèle élastique linéaire, soit pour un modèle élastique variable. Dans la plupart des calculs géotechniques, la résistance est déterminée par un critère de Mohr-Coulomb défini par les constantes  $c$  et  $\phi$ ; les modèles non linéaires donnent un module de cisaillement incrémental nul ( $G = 0$ ) quand ce critère est atteint. Les méthodes de détermination de  $c$  et  $\phi$  sont bien connues et ne demandent pas d'être exposées ici(\*).

##### Critère $E/c_u$ .

Un des critères les plus simples est de relier le module d'Young à la cohésion non-drainée  $c_u$ . Un rapport approprié est probablement dans l'intervalle 100 à 1000, les sols soumis à un chargement tendant vers la limite inférieure, et ceux soumis à un déchargement tendant vers la limite supérieure. Lambé (1973) a montré qu'un rapport  $E_u/c_u$  de 250 était bien en accord avec la déformation des argiles molles chargées par des remblais.

En utilisant cette relation, le module drainé  $E'$  peut être relié au module non-drainé en notant que  $G' = G_u$  (éq. 6.5):

$$E' = \frac{(1 + \nu')}{(1 + \nu'_u)} E_u = \frac{2}{3} (1 + \nu') E_u \quad (6.15)$$

##### Chemins de contraintes.

Avec un modèle rhéologique parfait, il ne serait pas grave de ne pas avoir les mêmes chemins de contraintes dans les essais et dans le barrage, puisque les résultats du modèle seraient valables pour tous les chemins. Mais les imperfections des modèles réels font qu'il est souhaitable que les chemins de contraintes des essais suivent d'aussi près que possible ceux du barrage réel. Ceci est particulièrement vrai pour les modèles élastiques. Les modèles élasto-plastiques sont moins sensibles au chemin de contrainte.

---

(\*) Une tendance récente est d'utiliser la courbe intrinsèque de De Mello pour les enrochements (Penman, 1983). Ceci pourrait donner des modifications notables de modèles.

Incorporating perfect plasticity ( $\phi = 0$ , no hardening or softening) are the most straightforward to apply. Introducing friction, especially if it involves the use of a non-associative flow rule, is likely to increase the cost of the analyses. The cost also increases rapidly as the factor of safety is reduced for iterative schemes, although not necessarily so — or at least to a lesser extent — for tangential schemes. The most difficult class of model to incorporate is one which features strain softening. This can occur with the Critical State model when yielding is to the left of C in Fig. 6.3b., making this a particularly difficult model to incorporate in a foolproof manner. It has been found slow to converge using iterative solutions and vulnerable to tangential schemes. Naylor (1983) has proposed a modification to the model to make it more robust, and preliminary work in applying this is encouraging.

The analysis of dams which involves gravity loading from an initially unstressed condition, then loading to a relatively low safety factor (typically causing extensive core yielding), followed by reservoir filling (causing unloading and often some areas of tension) provides a severe test of a finite element program. The practicality of applying the more sophisticated models must therefore be weighed carefully against the benefits expected from them.

#### 6.4. MATERIAL PARAMETERS

The selection of these is obviously of key importance on a par with, and possibly exceeding, the selection of the model itself.

Attention here is restricted to determination of the two elastic moduli for either a constant or variable elastic model. In most geotechnical analyses strength is defined by a Mohr-Coulomb criterion defined by the constants  $c$  and  $\phi$  with the non-linear models producing zero incremental shear stiffness ( $G = 0$ ) when this criterion is reached. The procedures for determining  $c$  and  $\phi$  are well established and need not be considered here(\*).

##### $E/c_u$ criterion.

One of the simplest criteria is to relate the Young's modulus to the undrained shear strength,  $c_u$ . An appropriate ratio is likely to lie in the range 100 to 1000, soils being loaded tending towards the lower end of this range, those unloaded (as in excavations) towards the upper. Lambe (1973) found  $E_u/c_u = 250$  gave quite good agreement for the deformation of soft clays loaded by fills.

In using this relation, the drained modulus,  $E'$ , may be related to the undrained by noting that  $G' = G_u$  (see eq. 6.5) to give:

$$E' = \frac{(1 + \nu')}{(1 + \nu_u)} E_u = \frac{2}{3} (1 + \nu') E_u \quad (6.15)$$

##### Stress paths.

Given a perfect constitutive model it would not matter if the stress path followed in the test differed from that in the prototype as the results would be valid for all paths. Due to the shortcomings of actual models, it is desirable that test stress paths follow those of the prototype as closely as possible. This is particularly true of the elastic models. The elasto-plastic models are less sensitive to the stress path.

---

(\*) A recent trend is to use the De Mello curved yield envelope for rockfill (Penman, 1983). This may result in some significant changes in the models.

Dans les barrages en remblai en construction, s'il est vrai qu'il y a de grandes variations des contraintes dans le corps du barrage, on constate peu de variations dans le rapport  $K_\sigma$ , entre les contraintes principales mineure et majeure. La Fig. 6.4. illustre ce fait par les résultats d'un calcul de contraintes dans un barrage théorique. Le rapport  $K_\sigma$  reste constant en un point donné (en raison du chemin de contrainte linéaire) mais  $K_\sigma$  varie sensiblement d'un point à l'autre du barrage.

Charles (1976) a donné des mesures du champ de contraintes pendant la construction du barrage en enrochements de Winscar. Pour un point situé près du centre du profil homogène, les valeurs de  $K_\sigma$  varient de 0.47 à 0.39 pour une variation de contrainte effective normale de 116 à 358 kPa. Il a utilisé un calcul par éléments finis pour déterminer les chemins de contraintes en des points choisis, pour trois types de barrages homogènes. Dans la plupart des cas, les variations de  $K_\sigma$  étaient inférieures à 20% de la valeur moyenne.

La phase de cisaillement d'un essai triaxial classique en consolidé-drainé cause une forte variation de  $K_\sigma$  et donne un chemin de contrainte qui n'est pas représentatif des conditions d'un remblai. Les cas extrêmes qui peuvent être modélisés par un triaxial sont celui de l'essai non-confiné, dans lequel  $K_\sigma = 0$ , et celui de l'essai en compression isotrope avec  $K_\sigma = 1$ . La Fig. 6.5. montre la réponse en déformation dans ces différents essais. On peut s'attendre à ce que la courbe contrainte-déformation, pour une valeur de  $K_\sigma$  comprise entre 0 et 1, soit située entre les deux courbes extrêmes. Comme on utilise généralement la courbe contrainte axiale-déformation axiale pour déterminer le module élastique, il est sûr que le rapport des contraintes principales va influencer ce paramètre. Corotis et al. (1974) ont étudié les variations des paramètres élastiques en fonction du rapport des contraintes principales pour deux sols compactés. Ils ont noté que, à partir d'un essai avec un rapport de contraintes  $K_\sigma$  plus élevé, on obtenait un module d'Young plus élevé et un coefficient de Poisson plus faible.

#### Paramètres du modèle K-G.

Un des avantages de base du modèle K-G est sa capacité de reproduire, au moins qualitativement, les caractéristiques des courbes de la Fig. 6.5., c'est-à-dire qu'en compression isotrope ( $K_\sigma = 0$ ) la courbe est concave vers le haut et que sous cisaillement elle est convexe. Le modèle K-G tient aussi compte de la relation entre la résistance et la pression de confinement, comme on l'a vu sur les courbes de la Fig. 6.1.

La Fig. 6.6., extraite du chapitre 4 de Naylor et al. (1981), montre une méthode de détermination des trois paramètres du module de cisaillement du modèle K-G ( $G_1$ ,  $\alpha_G$  et  $\beta_G$ ). On y voit les chemins de contraintes, dans l'espace des contraintes  $\sigma_s, \sigma_d$ , pour trois essais triaxiaux drainés sur le matériau argileux du noyau d'un barrage en remblai. Les valeurs numériques portées sur les chemins de contraintes sont les valeurs du module de cisaillement tangent ( $G$ ), obtenues à partir des pentes des courbes contraintes-déformations. (La pente de la courbe  $\sigma_1-\sigma_3$  en fonction de  $\epsilon_1 - 1/3 \epsilon_{vol}$  est  $3G$ ). Ces données peuvent être visualisées en définissant une surface dans l'espace  $\sigma_s, \sigma_d, G$ . Il apparaît que cette surface est approximativement un plan (en tenant compte, bien sûr, d'une certaine dispersion des pentes mesurées) et ce plan coupe le plan  $G = 0$  pour définir une ligne de rupture. Le modèle K-G définit cette surface comme le plan ayant l'équation (6.11). Par tâtonnement, ou plus formellement par un calcul de régression, il est assez facile d'ajuster ce plan aux mesures et de déterminer ainsi  $G_1$ ,  $\alpha_G$  et  $\beta_G$  (0.5 MPa, 27 et -27 dans l'exemple donné). Noter que ces trois valeurs font intervenir  $c'$  et  $\phi'$  (équations 6.13 et 6.14).

Une caractéristique importante de cette procédure est qu'elle permet d'obtenir les paramètres du module de cisaillement par des essais à dominante de cisaillement. De même, il faudrait déterminer les paramètres du module de compression volumique par des essais à dominante *sphérique*. La consolidation isotrope est un essai qui répond évidemment à ce critère. L'essai oedométrique peut aussi convenir pour définir le module de compression volumique dans la mesure où c'est principalement un essai de variation de volume.

In embankment dams under construction, although there is wide variation over the dam in the magnitude of the stresses, little variation in the ratio,  $K_\sigma$ , of the minor to the major principal stress occurs. This is illustrated in Fig. 6.4, which was obtained from the stress analysis of a model dam. Here  $K_\sigma$  is constant at a particular point (resulting in a straight stress path) but varies somewhat from one location to the next.

Charles (1976) presented field stress measurements for Winscar rockfill dam during construction. For a point near the centre of the homogeneous profile the  $K_\sigma$  values varied between 0.47 to 0.39 for a change in mean normal effective stress from 116 to 358 kPa. He used finite element analyses to calculate stress paths for selected points within three different types of homogeneous earth dams. In most cases the changes in  $K_\sigma$  were found not to exceed 20% of the median value.

The shear stage of a conventional consolidated-drained triaxial test causes a wide variation of  $K_\sigma$  and produces a stress path which is not representative of conditions in an embankment. The extreme cases which can be modelled in a triaxial test are that of the unconfined test in which  $K_\sigma = 0$ , and the isotropic compression test with  $K_\sigma = 1$ . Fig. 6.5, illustrates the strain response to be expected from these tests. The stress-strain curve for a  $K_\sigma$  value between zero and one may be expected to lie between these two curves. Since the axial stress-strain curve is generally used for deriving an elastic modulus, there is no doubt that the principal stress ratio would influence its value. The variations of elastic parameters with principal stress ratios for two compacted soils was studied by Corotis *et al.* (1974). It was noted that a higher Young's modulus and a lower Poisson's ratio were derived from the specimen tested under a higher stress ratio  $K_\sigma$ .

#### K-G model parameters.

The rationale behind the K-G model was that at least qualitatively it incorporates the characteristics shown in Fig. 6.5., *i.e.* that under isotropic compression conditions ( $K_\sigma = 0$ ) the curve is concave upwards and that under shear it is convex. It also incorporates the dependence of strength on confining pressure, illustrated by the family of curves in Fig. 6.1.

A procedure for determining the three shear modulus parameters for the K-G model, *i.e.*  $G_1$ ,  $\alpha_G$  and  $\beta_G$  is illustrated in Fig. 6.6. (from Chapter 4 of Naylor *et al.*, 1981). These show stress paths in a  $\sigma_s, \sigma_d$  stress space for three drained triaxial tests on a boulder clay for the core of a fill dam. The spot values marked on the stress paths are the tangential shear modulus (G) values obtained from the slopes of the stress-strain plots. (The slope of the  $\sigma_1 - \sigma_3$  v.  $\epsilon_1 - \frac{1}{3} \epsilon_{vol}$  is 3G). These data can be viewed as defining a surface in  $\sigma_s, \sigma_d, G$  space. The surface turns out to be approximately plane (subject of course to some scatter of the measured slopes) and intersects the  $G = 0$  plane to define a failure line. The K-G model idealizes this surface as a plane having the equation (6.11). By trial and error, or more formally by a regression analysis, it is relatively straight forward to fit this plane to the measured data and thereby determine  $G_1$ ,  $\alpha_G$  and  $\beta_G$  (0.5 MPa, 27 and -27 in the example given). Note that these three values imply  $c'$  and  $\phi'$  (equations 6.13 and 6.14).

An important feature of the above procedure is that the parameters for the shear modulus are obtained from a dominantly shear test. Conversely the bulk modulus parameters should be obtained from a test which is dominantly *spherical*. The isotropic consolidation test obviously satisfies this requirement. The oedometer test is also suitable for determining the bulk modulus since it is dominantly a volume change test.



### Essais oedométriques.

On a montré que l'essai oedométrique est particulièrement adapté à la détermination des valeurs de  $F$  pour les remblais. Penman et *al.* (1971) ont utilisé un module d'Young équivalent constant pour le calcul du barrage de Scamonden. Une approche semblable a été suivie par Penman et Charles (1973) pour le calcul du barrage de Llyn Brianne.

Il résulte de la discussion des chemins de contraintes effectuée plus haut que les chemins de contraintes suivis dans un remblai pendant la construction peuvent être simulés assez exactement par un essai dans lequel les contraintes principales ont un rapport constant. Parmi tous les essais classiques, c'est l'essai oedométrique qui vérifie le mieux cette condition, ainsi que l'essai de compression isotrope, dans le cas particulier des contraintes toutes égales.

Dans l'essai oedométrique, les modules élastiques de l'échantillon peuvent être déterminés complètement si la contrainte radiale est mesurée. Bishop et Henkel (1958) ont suggéré une méthode pour effectuer des essais de compression unidimensionnelle dans une cellule triaxiale classique, dans laquelle la contrainte radiale pourrait être mesurée. Cette méthode est acceptable pour les faibles pressions mais elle est moins idéale pour un essai à charge élevée. Booker et Ireland (1965) ont présenté un oedomètre dans lequel la contrainte radiale pouvait être mesurée pour une forte compression. Une autre méthode est de supposer *a priori* la valeur du coefficient de Poisson et de calculer ensuite  $E$  à partir du module oedométrique  $E_c$ . La relation est:

$$E = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \cdot E_c \quad (6.16)$$

En général ceci est une valeur tangente qui augmente avec la contrainte.

Plutôt que de supposer directement la valeur du coefficient de Poisson, il peut être préférable de le déterminer à partir d'un choix empirique de  $K_0$ , rapport entre les contraintes horizontale et verticale. Pour un chargement à partir d'un état initial sans contrainte, la théorie de l'élasticité donne la relation:

$$\nu = \frac{K_0}{1 + K_0} \quad (6.17)$$

Une pratique courante est de supposer que  $K_0 = 1 - \sin\phi'$  (Jaky, 1944).

Pour les sols de faible dilatance, comme le sont les remblais pulvérulents denses sous forte pression de confinement, le coefficient de Poisson peut être déterminé expérimentalement, si on peut disposer d'essais de consolidation isotrope en plus des essais oedométriques. Le module tangent de compression volumique  $K$  est obtenu directement à partir des essais de consolidation isotrope, et  $E_c$  ayant été mesuré à l'oedomètre, la théorie de l'élasticité donne:

$$E = \frac{9K(E_c - K)}{E_c + 3K} \quad (6.18)$$

$$\nu = \frac{3K - E_c}{E_c + 3K} \quad (6.19)$$

La Fig. 6.7. illustre cette méthode. Noter que dans l'oedomètre la déformation verticale est aussi la déformation volumique. Ainsi le même axe de déformation s'applique aux deux essais.

Dans le but de vérifier l'approximation de Jaky (*op.cit.*) sur  $K_0$ , Eisenstein et Law (1979) ont effectué quelques essais oedométriques sur un remblai, et comparé les relations mesurées contraintes-déformations avec celles obtenues en supposant la valeur de  $K_0$  et en calculant  $E$  avec l'équation (6.16). Ils ont trouvé que l'approximation de  $K_0$  était raisonnable dans ce cas.

### Oedometer tests.

The oedometer test has been found particularly appropriate for the determination of E values for fills. Penman *et al.* (1971) used an equivalent constant Young's modulus in an analysis of Scammonden Dam. A similar approach was used by Penman and Charles (1973) in their analysis of Llyn Brianne Dam.

From the discussion of stress paths above it is apparent that the true stress paths in an embankment during construction are simulated reasonably closely by a constant principal stress ratio test. This test is, among the conventionally available testing techniques, most nearly represented by an oedometer and, in the special case of equal all round stress, by an isotropic compression test.

In the oedometer compression test the elastic moduli of the sample can be completely determined if the radial stress is measured during the test. Bishop and Henkel (1957) have suggested a method of performing one-dimensional compression tests in a conventional triaxial cell in which the radial stress could be measured. This procedure is acceptable for a low pressure range but is less ideal for a test with high sustained loading. An oedometer in which the radial stress could be measured during compression under high pressure was presented by Booker and Ireland (1965). An alternative is to assume a Poisson's ratio and then calculate E from the constrained modulus  $E_c$ , measured in the oedometer. The relation is:

$$E = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \cdot E_c \quad (6.16)$$

This in general will be a tangential value, increasing with stress.

Rather than assume Poisson's ratio directly it may be preferable to derive it from an empirical choice of the horizontal to vertical stress ratio  $K_0$ . For loading (from an initially unstressed state) the relation from elastic theory is:

$$\nu = \frac{K_0}{1 + K_0} \quad (6.17)$$

A common practice is to assume  $K_0 = 1 - \sin\phi'$  (Jaky, 1944).

For soils in which dilatancy effects are not marked, as is likely to be the case in dense granular fills under high confining pressure, Poisson's ratio may be determined experimentally if isotropic consolidation tests are available in addition to the oedometer. The tangential bulk modulus, K, is obtained directly from the isotropic consolidation tests, and  $E_c$  having been measured in the oedometer, one obtains from elastic theory:

$$E = \frac{9K(E_c - K)}{E_c + 3K} \quad (6.18)$$

$$\nu = \frac{3K - E_c}{E_c + 3K} \quad (6.19)$$

The procedure is illustrated in Fig. 6.7. Note that in the oedometer the vertical strain is also the volumetric. Hence the same strain axis applies to both tests.

In order to assess the approximation involved in using the Jaky (*op.cit.*) assumption for  $K_0$ , Eisenstein and Law (1979) carried out some oedometer tests on a fill and compared measured stress-strain relations with those obtained by assuming  $K_0$  and calculating E according to equation (6.16). They found that the  $K_0$  assumption was reasonable in this case.

Eisenstein et Law (*op.cit.*) ont aussi étudié l'effet du niveau de contrainte sur le coefficient de Poisson, quand on le détermine à l'aide d'essais de consolidation isotrope et oedométrique (c'est-à-dire avec le  $K_0$  de l'équation [6.17]). Ils ont trouvé que pour le remblai du barrage de Mica, le coefficient de Poisson était sensiblement constant, à 0,35 pour le matériau à faible teneur en eau et à 0,37 pour une forte teneur en eau. Les contraintes variaient de zéro à près de 800 psi (5,5 MPa).

Ceci suggère que, comme les chemins de contraintes suivis dans la plupart des barrages en remblai sont semblables à ceux de l'oedomètre, il est raisonnable d'utiliser un modèle rhéologique dans lequel le coefficient de Poisson est constant. Cependant, si le chemin de contrainte devait différer significativement de ces conditions comme c'est probable lors de la mise en eau, on pourrait s'attendre à des variations du coefficient de Poisson. Pour les chemins de contraintes le long desquels le déviateur croît par rapport à la contrainte moyenne, comme l'essai de cisaillement triaxial, le coefficient de Poisson tangent augmentera jusqu'à près de 0,5 à la rupture.

## 6.5. ÉTUDES DE CAS

Dans ce paragraphe, on donne une brève description de quelques calculs pour lesquels on a fait des comparaisons avec le comportement réel mesuré de l'ouvrage. De plus, on passe rapidement en revue quelques études dans lesquelles on a comparé plusieurs modèles rhéologiques.

### Barrages de Scammonden et de Llyn Brianne.

Le barrage de Scammonden a été le premier de nombreux barrages en remblai du Royaume-Uni à être bien ausculté. C'est un barrage à noyau argileux incliné, de 70 m de haut, construit à la fin des années 60. Penman et *al.* (1971) en firent un calcul par éléments finis, qui fut le premier pour un grand barrage du Royaume-Uni. On a déjà exposé plus haut (§.6.4.) la méthode qu'ils ont employée pour déterminer un module d'Young représentatif, pour le calcul de la construction, à partir d'essais oedométriques. La Fig. 6.8. montre le bon accord entre les mesures et les calculs. Charles (1975) a analysé les mesures de déformations (pas par éléments finis) pour obtenir les dessins des champs de déformations pour plusieurs hauteurs du remblai. Il effectua aussi ces calculs pour le barrage de Llyn Brianne.

Le barrage de Llyn Brianne fut construit peu après celui de Scammonden. C'est actuellement (1985) le plus haut barrage en remblai de Grande-Bretagne. Il a un noyau central argileux. Penman et Charles (1973) l'ont calculé par éléments finis avec les mêmes procédures que pour Scammonden. La Fig. 6.10. montre les résultats de leurs calculs. Encore un fois, l'accord entre calculs et mesures est convenable, avec cependant une dispersion, allant jusqu'à un facteur 2, de part et d'autre des valeurs mesurées.

Cathie et Dungar (1978) ont modélisé la construction du barrage de Llyn Brianne en utilisant trois lois rhéologiques différentes: élastique linéaire, hyperbolique et élasto-plastique. Les calculs élastiques furent effectués à la fois en bi- et tridimensionnel. Ils ont conclu que la meilleure cohérence globale était celle des calculs élastiques linéaires ! La Fig. 6.11. montre quelques résultats. Les points de mesures A2 et B4 sont visibles sur la Fig. 6.9. Les auteurs ont aussi calculé les champs de déformations et les ont comparés aux déformations mesurées déterminées par Charles (*op.cit.*). Les déformations latérales calculées n'étaient pas en accord avec les mesures. Les auteurs pensèrent que la source principale d'erreur venait de l'impossibilité du modèle élastique à représenter les déformations du noyau. Ils utilisèrent donc une loi élasto-plastique pour le noyau, mais les résultats restèrent incorrects.

Eisenstein and Law (*op.cit.*) also studied the effect of stress level on Poisson's ratio when it was determined from oedometer and isotropic consolidation tests (*i.e.* from  $K_0$  using equation [6.17]). They found that for the Mica Dam fill Poisson's ratio was sensibly constant at 0.35 for the material with low water content and 0.37 for high water content. The stress ranged from zero to nearly 800 psi (5.5 MPa).

This suggests that since the stress paths followed in the major part of fill dams are similar to those in the oedometer then it is reasonable to use a model which incorporates a constant Poisson's ratio. Should, however, the stress path deviate significantly from this, as it is likely to do, during reservoir filling, then variations in Poisson's ratio can be expected. In stress paths in which the deviator stress is increasing relative to the mean stress, as in a triaxial shear test, the tangential Poisson's ratio will increase to close to 0.5 at failure.

## 6.5. CASE STUDIES

In this section a brief description of some analyses in which comparisons against measured performance have been made is given, also a brief review is made of some studies which have compared different material models.

### Scammonden and Llyn Brianne dams.

Scammonden Dam was the first of a number of relatively large fill dams built in the U.K. to be well instrumented. It is 70 m high, has a non-central sloping clay core, and was constructed in the late 1960s. The finite element analyses of it by Penman *et al.* (1971) were the first of a major U.K. dam. Reference has already been made (in 6.4.) to the procedure they used to obtain a representative Young's modulus from oedometer tests for the construction analysis of this dam. Fig. 6.8. shows that a reasonably good agreement with measurements was obtained. Charles (1975) analysed the deformation measurements (not by finite elements) to obtain from them plots of strain distribution for different fill heights. He did this also for Llyn Brianne Dam.

Llyn Brianne followed shortly afterwards. At the time of writing it is the highest fill dam in Great Britain. It has a central clay core. Penman and Charles (1973) analysed it by finite elements applying the same procedures as for Scammonden. The results of their analyses are shown in Fig. 6.10. Again agreement with the measured displacements was reasonable although with a scatter of up to about a factor of two either side of the measured values.

Cathie and Dugar (1978) analysed the construction of Llyn Brianne Dam using three different material idealizations — linear elastic, hyperbolic variable elastic and elasto-plastic. The elastic analyses were both two and three dimensional. They concluded that the best overall agreement came from the linear elastic analyses! Fig. 6.11. shows some of their results. The measurement points A2 and B4 are located in Fig. 6.9. They also computed strain distributions and compared these with the measured strains derived by Charles (*op.cit.*). The computed lateral strains did not agree with the measured. They thought that the inability of the elastic idealization to model the core deformations was a major source of error, yet when they modelled it as elastic-plastic the results were still not good.

### Barrage de Ilha Solteira.

Celestino et Marechal (1975) ont présenté une comparaison intéressante des performances de deux modèles rhéologiques dans leur calcul du barrage de Ilha Solteira au Brésil. Ce barrage est un remblai homogène de sable argileux, de 70 m de haut (Fig. 6.12.). Un calcul non-linéaire fut basé sur les résultats d'essais triaxiaux non-consolidés non-drainés (UU). Un autre calcul non-linéaire a utilisé l'essai PN, proposé par Casagrande et Hirschfeld (1960). Dans cet essai, un échantillon de sol est chargé, dans une cellule triaxiale, avec un rapport de contraintes principales constant ( $K = \sigma_3/\sigma_1$ ). Les relations entre la déformation axiale  $\epsilon_1$  et la contrainte principale majeure  $\sigma_1$ , pour deux valeurs de  $K$ 's, donnent deux paramètres indépendants. Les Fig. 6.13. et 6.14. montrent les résultats pour les tassements calculés du barrage de Ilha Solteira. Alors que le calcul basé sur les essais PN montrent un bon accord avec les déplacements mesurés, le calcul basé sur les résultats du triaxial (essais UU) prédisaient des déplacements sensiblement plus forts.

### Barrage de Mica (et travaux associés).

Eisenstein et Simmons (1975) ont modélisé la construction du barrage de Mica au Canada par une série de calculs linéaires, un pour chaque couche, en modifiant les rigidités à chaque fois (ce qui rend effectivement le calcul non-linéaire, comme on l'a vu au paragraphe 6.3.). Ils obtiennent un bon accord avec les déplacements, mesurés à la fois en bi- et tridimensionnel, avec peu de différence entre ces deux calculs. Ces résultats ont déjà été discutés au chapitre 3.

Dans des études du même barrage, Law (1975) a fait des comparaisons entre des calculs basés sur la méthode *tabulaire* (3.6.4.) et des calculs avec une loi rhéologique hyperbolique. Dans les deux cas, les paramètres avaient été déterminés à partir d'essais triaxiaux (avec cisaillement). Dans les deux calculs, les déplacements ont été comparés entre eux et avec les valeurs mesurées (Fig. 6.16. et 6.17.). La Fig. 6.15. montre la position des points où le tassement est mesuré. Ces calculs ont montré un bon accord entre les deux méthodes. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où elles sont toutes deux basées sur les mêmes données expérimentales. Cependant, les deux méthodes donnent des tassements supérieurs, de 2,5 à 3,5 fois, aux tassements mesurés (Fig. 6.18.).

Un troisième calcul du barrage de Mica fut effectué avec des modules élastiques non-linéaires tirés d'essais oedométriques et d'essais de compression isotrope. Les résultats de ce calcul étaient en bien meilleur accord avec les données *in situ*. Eisenstein et Law (1979) donnent une description détaillée de ce calcul, y compris la procédure d'essais et la méthode de calcul des modules.

Ce troisième calcul fut effectué deux fois — une fois en non-drainé en contraintes totales et l'autre en calcul de consolidation, en suivant la méthode à deux étapes décrites au paragraphe 5.3. précédent(\*). Les Fig. 6.19. à 6.21. donnent les comparaisons de résultats de ces calculs avec les mesures. On peut noter que le calcul de consolidation (triangles) donne un meilleur accord avec les mesures que le calcul non-drainé (cercles), bien que les différences soient si petites qu'elles sont à peine significatives.

Eisenstein (1974) a résumé les performances des modèles rhéologiques basés sur le triaxial, d'après neuf calculs publiés sur six barrages en terre. Ce résumé, présenté dans le Tableau 6.1., donne la liste des accords et désaccords entre le calcul et le comportement observé du barrage, en termes de déplacements verticaux et horizontaux. Les déplacements verticaux, qui sont prédominants pendant la construction des barrages en terre, montrent un accord assez étonnant entre le calcul et les mesures *in situ*.

---

(\* Dans ces articles et dans les chiffres qu'on en a tirés, les termes *contrainte totale* et *contrainte effective* sont utilisés sans référence particulière à ces deux méthodes.

### **Ilha Solteira Dam.**

Celestino and Marechal (1975) presented a significant comparison of the performance of two stress-strain models in their analysis of the Ilha Solteira Dam in Brazil. The dam is a 70 m high, homogeneous embankment of sandy clay (Fig. 6.12.). One non-linear analysis was based on test data obtained from an unconsolidated undrained triaxial test (UU data). Another analysis, also non-linear, utilized the PN test as proposed by Casagrande and Hirschfeld (1960). In this test a soil sample is loaded in a triaxial cell with constant ratio of the principal stresses ( $K = \sigma_3/\sigma_1$ ). Relationships between axial strain  $\epsilon_1$  and maximum principal stress  $\sigma_1$  at two different  $K$ 's provide two independent parameters. Results from the Ilha Solteira Dam analyses for settlements are presented in Fig. 6.13. and 6.14. While the analysis based on the PN tests showed a reasonable agreement with the measured movements the analysis using the triaxial data (UU tests) predicted substantially higher displacements.

### **Mica Dam (and associated work).**

Eisenstein and Simmons (1975) analysed the construction of Mica Dam in Canada as a series of linear analysis, one for each layer with the stiffness altered in each (thus making the analysis effectively non-linear, see 6.3. above). They obtained good agreement with measured deformations from both 2D and 3D analyses, there being little difference between the two. These results have already been discussed in Chapter 3.

In studies on the same dam Law (1975) made comparison between analyses using the *tabular* method, based on stress invariants described in 6.4. above, and analyses incorporating the hyperbolic model. In both cases the parameters were determined from triaxial (shear) tests. Deformations from both analyses are compared with each other and with measured movements in Fig. 6.16. and 6.17. Fig. 6.15. shows the locations of the settlement points in plan and elevation. These analyses showed quite good agreement between the two methods. This is not surprising since both were based on the same test data. Both, however, predicted settlements 2.5 to 3.5 times greater than those measured (Fig. 6.18).

A third analysis of Mica Dam was performed using non-linear elastic moduli derived from oedometer and isotropic compression tests. Results of this analysis were found in much closer agreement with the field data. Eisenstein and Law (1979) give a detailed description of the analysis, including the testing procedure and the method of deriving the moduli.

This third analysis was done twice — once as an undrained analysis in terms of total stress and again as a consolidation analysis using the two stage total/effective time stepping procedure described in 5.3. above(\*). The results of these analyses are compared with measurements in Fig. 6.19. to 6.21. It may be noted that the consolidation analysis (triangles) gives better agreement with the measurements than the undrained (circles), although the differences are so small as to be hardly significant.

Eisenstein (1974) summarized the performance of triaxial based stress-strain models used in 9 published analyses of 6 earth dams. The summary, presented in Table 6.1., lists agreement or disagreements between the analysis and the observed behaviour of the prototype in terms of horizontal and vertical displacements. Vertical displacements, which are the dominant movements in earth dams during construction, showed rather disappointing agreement between analyses and field measurements.

---

(\* In the papers and in the figures taken from them the terms *total stress* and *effective stress* are used without qualification to refer to these two procedures.

---

Tableau 6.1.

Performances des modèles rhéologiques basés sur le triaxial

<u>Barrages:</u>	<u>Nombre de calculs publiés</u>
Otter Brook, USA	4
El Infiernillo, Mexique	3
Wilmot, Australie	1
Oroville, USA	1
TOTAL:	9

Comparaison avec les mesures *in situ*

	<u>Déplacements horizontaux</u>	<u>Déplacements verticaux</u>
Accord	5	3
Désaccord	3	6

Barrage de Teton

Les études de cas présentées ci-dessus sont toutes liées à la période de construction. Elles servent à caler les modèles pour les rendre plus utiles dans le calcul des barrages en service, ce qui est le véritable domaine intéressant. Très peu de recherches ont été effectuées dans ce domaine et encore moins ont été publiées. Dans cet article, on fera référence à un seul de ces cas, pour illustrer le rôle des éléments finis, celui du barrage de Teton. Le groupe d'Experts chargé d'élucider l'accident fit effectuer plusieurs calculs par éléments finis *a posteriori*. La Fig. 6.22., tirée d'une description de l'accident par Penman (1977), montre un transfert de contrainte très significatif (par effet de voûte) au-dessus de la tranchée parafouille sous le noyau. Ces contraintes ont été obtenues par un calcul par éléments finis. Si un tel calcul avait été effectué auparavant, et interprété en termes de risque de fracturation hydraulique, la conception du barrage en aurait été certainement modifiée.

Comparaison entre les modèles rhéologiques.

Naylor (1975) a cherché à comparer les modèles élastiques linéaires, K-G et d'état critique dans le calcul de la construction d'un barrage typique à noyau central argileux. La géométrie et les propriétés des matériaux, bien qu'hypothétiques, étaient proches de celles du barrage de Llyn Brianne. Deux scénarios furent étudiés: une construction rapide, telle que le noyau soit non-drainé, suivie d'une dissipation des surpressions interstitielles, et une construction parfaitement drainée. La Fig. 6.23. montre les vecteurs déplacements en des points choisis, et fait apparaître des différences importantes selon les modèles rhéologiques. La raison est la mise en plasticité importante du noyau, qui est modélisée dans les calculs non-linéaires, et qui produit des déplacements des deux modèles non-linéaires. Toutefois, on peut noter que ces déplacements peuvent être sensibles aux faibles différences qui existent, soit entre les modèles eux-mêmes, soit entre les paramètres définissant la courbe intrinsèque quand l'état de contrainte est proche de la rupture (ce qui se produit dans de grandes zones à la fin de la construction non-drainée dans ces calculs).

On reconnaît généralement l'importance d'une bonne prévision de la réponse en pression interstitielle à un chargement, et ceci constitue une part importante du rôle

Table 6.1.

Performance of triaxial based stress-strain models

<u>Dams:</u>	<u>Number of analyses published</u>
Otter Brook, USA	4
El Infiernillo, Mexique	3
Wilmot, Australie	1
Oroville, USA	1
TOTAL:	9

Comparison with field measurements

	<u>Horizontal displacements</u>	<u>Vertical displacements</u>
Agreement	5	3
Disagreement	3	6

Teton Dam

The case histories described above have all related to the construction stage. They serve to calibrate the models so as to make them more useful for the analysis of dams in operation — the real area of interest. Very little has been done on this, and less published. A single case will be referred to here to illustrate the role of finite element analyses, and that is Teton Dam. After-the-event finite element analyses were carried out for the Panel which investigated the accident. Fig. 6.22., taken from the description of the collapse by Penman (1977), shows the very significant stress transfer (or arching) across the key trench obtained from a finite element analysis. Had such an analysis been carried out before hand and interpreted in the light of hydraulic fracture potential then the design would surely have been changed.

A comparison of models.

Naylor (1975) sought to compare the linear elastic, K-G, and Critical State models in the construction analysis of a typical central clay core dam. The section and material properties assumed, although hypothetical, approximated those of Lyn Brianne Dam. Two scenarios were studied: rapid construction so that the core was undrained followed by dissipation of the excess pore pressures, and fully drained construction. Displacement vector plots for representative points are shown on Fig. 6.23. Major differences between the models are revealed. The reason is that very significant yielding in the core was modelled in the non-linear analysis which caused displacements which obviously could not be followed in the linear. No explanation is offered for the differences between the two non-linear model displacements, except to note that displacements will be sensitive to either small differences in the model itself or in the parameters defining yield when the stress condition is close to yield (as it was over quite large regions at the end of undrained construction in these analyses).

The importance of a good prediction of pore pressure response to applied loading is widely recognized and this forms an important part of the role of the finite element



de la méthode des éléments finis. La Fig. 6. 24. montre comment un modèle d'état critique permet de calculer une pression interstitielle plus forte que celle donnée par un modèle élastique non-linéaire pour une argile molle, tenant compte ainsi des propriétés de dilatance négative d'un tel matériau.

## 6.6. CONCLUSIONS

La méthode des éléments finis est un outil puissant de calcul des déplacements et des contraintes dans les remblais et les barrages. Cependant, la méthode en elle-même ne peut garantir la précision des prédictions. Les lois rhéologiques utilisées pour décrire le comportement des matériaux et le choix des valeurs des paramètres de ces lois sont les éléments-clés de tout le calcul.

Les modèles rhéologiques les plus avancés dans la reproduction des comportements spécifiques des sols sont des combinaisons d'éléments d'élasticité et de plasticité. De tels modèles ont été développés et, dans certains cas, appliqués à des calculs de barrages en terre. Considérant leurs potentialités, il semble nécessaire d'acquérir une plus grande expérience dans l'utilisation de ces modèles, en particulier en employant des versions simplifiées. Il est aussi nécessaire de préciser les différences entre modèles élastiques non-linéaires et modèles élasto-plastiques, en particulier quand ils utilisent le même critère de rupture.

On a montré dans ce rapport que, quand on utilise des modèles élastiques, il est capital de reproduire dans les essais des chemins de contraintes semblables à ceux suivis dans le remblai. Pendant la construction, la plus grande partie d'un remblai en terre suit un chemin de contrainte plus près du chemin avec rapport constant entre les contraintes principales que du chemin triaxial classique avec  $\sigma_3$  constant et déviateur croissant. Les études du comportement du barrage de Mica pendant la construction, ainsi que l'examen attentif d'un grand nombre de publications sur des calculs de barrages en terre, ont montré les inconvénients significatifs des essais triaxiaux classiques dans la prévision des mouvements des barrages en terre. Les modules élastiques dépendant des contraintes tirées des essais triaxiaux surestiment les tassements observés. Cependant, il faut être prudent dans la détermination des paramètres pour un calcul post-construction. Dans ce cas, les chemins de contraintes peuvent différer significativement du chemin avec rapport constant de contraintes principales, que l'on observe pendant la construction, et ceci entraîne une modification des critères utilisés dans le choix des paramètres. Le principe de baser ce choix sur des chemins de contraintes bien choisis s'appliquera encore vraisemblablement.

Ce chapitre a montré que l'essentiel du travail de calage des modèles rhéologiques a été effectué pour la phase de construction, et ceci prouve la nécessité d'établir des modèles valables pour le calcul des phases postérieures à la construction (c'est-à-dire service normal en régime permanent, et vidange rapide). (Voir Fig. 4. 1.).

## REFERENCES

ATKINSON, J.A. and BRANSBY, P.L., 1978. *The Mechanics of Soils. An Introduction to Critical State Soil Mechanics*, McGraw Hill, London.

method. Fig. 6.24. illustrates how the Critical State model will compute a higher pore pressure than a variable elastic model for a soft clay, thus reflecting the negative dilatancy properties of such material.

## 6.6. CONCLUSIONS

While the finite element method has become a powerful tool for deformation and stress analysis of embankments and dams, the method itself cannot guarantee the accuracy of predictions. The constitutive, or stress-strain, laws used to describe the soil behaviour, and the selection of values for their parameters are the key elements in the entire analysis.

The stress-strain models most advanced in reflecting the specific features which soils exhibit under load combine elements of elasticity and plasticity. Such models have been developed and, in a few cases, applied to earth dam analysis. In view of their potential there is a need to obtain greater experience with these models, particularly with the simpler versions. There is also a need to assess the differences between non-linear elastic and elastic-plastic models particularly when they incorporate the same yield criterion.

It has been shown in this report that when using the elastic models the importance of considering stress path dependency in stress-strain testing for an embankment analysis is overwhelming. During its construction a major part of an earth embankment follows a stress path closer to a constant principal stress ratio rather than a conventional triaxial path with  $\sigma_3$  constant and increasing deviatoric stress. Studies of the construction behaviour of Mica Dam, as well as a close scrutiny of a number of published case histories of earth dam analyses has revealed significant shortcomings in conventional triaxial tests for predicting movements in earth dams. Stress dependent elastic moduli derived from triaxial tests overestimate the observed settlements. Caution, however, is required in determining parameters for post-construction analysis. The stress paths here may differ significantly from the constant principal stress ratio encountered during construction with a consequent effect on the criteria used for parameter selection. The principle of basing them on appropriate stress paths will presumably still apply.

This chapter has illustrated that most of the work on the calibration of the models has been done for the construction phase, and this highlights the need for assessment of the models in the analysis of post-construction performance — *i.e.* the establishment of steady seepage and rapid drawdown (see Fig. 4.1.).

BISHOP, A.W. and HENKEL, D.J., 1957. *The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test*, E. Arnold, London.

BROOKER, E.W. and IRELAND, H.O., 1965. *Earth Pressures at Rest Related to Stress History*, Canadian Geotechnical Journal, 2, pp.1-15.

CAHILLER, B.F., 1946. *Propagation of Waves in Orthotropic Media*, Q. Appl. Math., 4, pp.160-165.

- CATHIE, D.N. and DUNGAR, R., 1978. *Evaluation of Finite Element Predictions for Constructional Behaviour of a Rockfill Dam*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 65, pp. 551-568.
- CASAGRANDE, A. and HIRSCHFIELD, R.C., 1960. *Stress-Deformation and Strength Characteristics of a Clay Compacted to a Constant Dry Unit Weight*, Proc. Res. Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, ASCE, Univ. of Colorado, Boulder, pp. 359-417.
- CELESTINO, T.B. and MARECHAL, L.A., 1975. *Stresses and Strains in the Ilha Solteira Earth Dam*, Proc. 5 Panam. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Buenos Aires, 2, pp. 189-198.
- CHARLES, J.A., 1975. *Strains Developed in Two Rockfill Dams During Construction*, Geotechnique, 25, No2, pp. 321-332.
- CHARLES, J.A., 1976. *The Use of One-Dimensional Compression Tests and Elastic Theory in Predicting Deformations of Rockfill Embankments*, Canadian Geotechnical Journal, 13, pp. 189-200.
- CLOUGH, R.W. and WOODWARD, R.J., 1967. *Analysis of Embankment Stresses and Deformations*, J. Soil Mech. Fdn. Eng. Div., ASCE, 93, NoSM4, pp. 529-549.
- CORMEAU, I.C., 1975. *Numerical Stability in Quasistatic Elasto-Visco-Plasticity*, Int. J. Num. Meth. Engng., 9, pp. 109-127.
- COROTIS, R.B., FARZIN, M.H. and KRIZEK, R.J., 1974. *Non-Linear Stress-Strain Formulation for Soils*, J. Geot. Eng. Div., ASCE, 100, pp. 993-1008.
- DUNCAN, J.M. and CHANG, C.Y., 1970. *Non-Linear Analysis of Stress and Strain in Soils*, J. Soil Mech. and Fdn. Div., ASCE, 96, NoSM5, pp. 1629-1654.
- EISENSTEIN, Z., 1974. *Application of Finite Element Method to Analysis of Earth Dams*, State-of-the-Art Report, Proc. First Brazilian Seminar on Application of Finite Element Method in Soil Mech., Univ. Fed. de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 457-528.
- EISENSTEIN, Z. and SIMMONS, J.V., 1975. *Three-Dimensional Analysis of Mica Dam*, Proc. Int. Symp. on Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, Univ. of Wales, Swansea, Sept. 1975, pp. 1052-1069.
- EISENSTEIN, Z. and LAW, S.T.C., 1979. *The Role of Constitutive Laws in Analysis of Embankments*, Internal report, Dept. of Civil Engng., Univ. Alberta, Edmonton.
- GAZATAS, G., 1981. *Strip Foundations on a Cross-Anisotropic Soil Layer Subjected to Dynamic Loading*, Geotechnique, 31, No2, pp. 161-180.
- JAKY, J., 1944. *The Coefficient of Earth Pressure at Rest*, Soc. Hungarian Architects and Engineers, pp. 335-358.
- JANBU, N., 1963. *Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests*, Proc. European Conf. on Soil Mech. and Found. Engrg., Wiesbaden, Vol. 1, pp. 19-25.
- KONDER, R.L., 1963. *Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils* J. Soil Mech. and Fdn. Div., ASCE, 89, NoSM1, pp. 115-143.
- KULHAWY, F.H., DUNCAN, J.M. and SEED, H.B., 1969. *Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Embankments During Construction*, Report NoTE69-4, Office of Research Services, Univ. of California, Berkeley.
- KULHAWY, F.H. and DUNCAN, J.M., 1972. *Stress and Movements in Oroville Dam*, Proc. ASCE, 98, NoSM7, pp. 653-665.

- LAMBE, T.W., 1973. 13th Rankine Lecture: *Predictions in Soil Engineering*. Geotechnique, 23, No2, pp.149-202.
- LAMBE, T.W. and MARR, W.A., 1979. *Stress Path Method*. Second edition, J. Geot. Eng. Div., ASCE, 105, pp.727-738.
- LAMBE, T.W. and WHITMAN, R.V., 1969. *Soil Mechanics*, Wiley.
- LAW, S.T.C., 1975. *Deformations of Earth Dams During Construction*, Ph.D. Thesis, Univ. of Alberta, Edmonton.
- NAYLOR, D.J., 1975. *Numerical Models for Clay Core Dams*, Criteria and Assumptions for Num. Analysis of Dams, (Proc. of Symp. at Swansea), pp.489-514.
- NAYLOR, D.J., 1978. *Stress-Strain Laws for Soil*, Chapter 2 of *Developments in Soil Mechanics*, Ed. C.R. Scott, Applied Science, England.
- NAYLOR, D.J., 1982. *The Effect of the Fill Stiffness*, Proc. 4th Int. Conf. Num. Meth. Geomechanics, 2, pp.735-740.
- NAYLOR, D.J., 1983. *A Continuous Plasticity Version of the CSM*, Internal report C/R/442/82 (revised May, '83), Dept. of Civ. Engng., Univ. Col., Swansea.
- NAYLOR, D.J., PANDE, G.N., SIMPSON, B. and TABB, R., 1981. *Finite Elements in Geotechnical Engineering*, Pineridge Press, Swansea.
- NELSON, J. and BARON, M.L., 1971. *Application of Variable Moduli to Soil Behaviour*, Int. J. Solids and Structures, 7, pp.399-417.
- PENMAN, A.D.M., 1977. *The Failure of Teton Dam*, Ground Engineering, 10, No6, pp.18-27.
- PENMAN, A.D.M., 1983. *Latest Geotechnical Developments Relating to Embankment Dams*, Ground Engineering, 16, No4, pp.19-27.
- PENMAN, A.D.M., BURLAND, J.B. and CHARLES, J.A., 1971. *Observed and Predicted Deformations in a Large Embankment Dam During Construction*, Proc. Institution of Civil Engineers, 49, pp.1-21.
- PENMAN, A.D.M. and CHARLES, J.A., 1973. *Constructional Deformations in Rockfill Dams*, J. Soil Mech. and Fdn. Div., ASCE, 99, NoSM2, pp.139-163.
- SCHOFIELD, A.N. and WROTH, G.P., 1968. *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill.
- SEED, H.B., DUNCAN, J.M. and IDRIS, I.M., 1975. *Criteria and Methods for Static and Dynamic Analysis of Earth Dams*, Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, (Proc. of Symposium at Swansea), pp.564-588.
- SKERMER, N.A., 1973. *Finite Element Analysis of El Infiernillo Dam*, Can. Geot. Journal, 10, No2, pp.129-144.
- SMITH, I.M. and HOBBS, R., 1974. *Finite Element Analysis of Centrifuged and Built-up Slopes*, Geotechnique, 24, No4, pp.531-559.
- WONG, K. and DUNCAN, J.M., 1974. *Hyperbolic Stress-Strain Parameters for Non-Linear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses*, Report NoTE-74-3, Dept. of Civ. Engng., Univ. of California, Berkeley, pp.1-90.
- WOOD, D.M., 1975. *Explorations of Principal Stress Space With Kaolin in a True Triaxial Apparatus*, Geotechnique, 25, No4, pp.783-797.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and CORMEAU, I.C., 1974. *Visco-Plasticity — Plasticity and Creep in Elastic Solids — a Unified Numerical Solution Approach*, Int. J. Num. Meth. Engng., 8, pp.821-845.

---

## 7. CONCLUSIONS

---

Il y a plus de vingt ans environ, avant l'arrivée des méthodes numériques puissantes, représentées principalement par la méthode des éléments finis, le calcul des barrages en remblai reposait sur le concept d'équilibre limite. Ce concept est encore valable et largement utilisé, et il le restera jusqu'à ce que l'écart entre les calculs à la rupture et les calculs en service normal soit comblé, dans le domaine des ouvrages en terre. Alors que des chercheurs travaillent dans cette direction, il est encore courant, dans la pratique de l'ingénieur, de séparer ces deux conditions.

Ce rapport traite des deux cas, mais on a accordé plus d'attention à la méthode des éléments finis, parce que cette méthode a comblé un vide en donnant une meilleure compréhension des déplacements et des contraintes dans un barrage en service — ce que ne peut donner le concept d'équilibre limite.

Dans son développement pour son application aux barrages en remblai, la méthode des éléments finis est passée par plusieurs étapes importantes. La première fut le développement des concepts théoriques, qui fut suivie par les études paramétriques de barrages théoriques, puis éventuellement par des analyses en retour (réussies) de cas réels. L'étape finale, et certainement la plus importante pour l'utilisation totale de la méthode, fut son utilisation pour la conception de grands projets de barrages. Le nombre de cas, où la méthode des éléments finis a été utilisée à ce niveau, ne cesse de croître, et montre que la méthode est maintenant bien acceptée par la profession.

La méthode est particulièrement intéressante dans deux domaines: l'évaluation du risque de fracturation, et l'analyse des résultats d'auscultation. Le problème de la fracturation est très proche de celui de la fracturation hydraulique, qui dépend de l'état de contrainte et du champ de pression interstitielle. Des méthodes de calcul, capables, au moins en théorie, de modéliser ces phénomènes, ont été décrites plus haut. D'autre part, avec l'amélioration de la fiabilité des appareils de mesures *in situ*, il est maintenant courant de surveiller le comportement d'un remblai, pendant et après la construction, de façon beaucoup plus intense que par le passé. Le seul bon sens n'est pas toujours suffisant pour expliquer les mesures obtenues et, dans ces conditions, le recours à un calcul de déplacements, contraintes et pressions interstitielles est presque indispensable.

Ce rapport ne cherche pas à avoir le dernier mot dans un domaine à développement aussi rapide que le calcul des ouvrages en terre. Il essaie seulement de donner une image et d'être un guide, basés sur plus d'une décennie de progrès. Il paraît inévitable que des synthèses semblables soient rédigées par la suite, quand se sera accrue notre expérience de la modélisation de barrages en remblai bien surveillés.

---

## 7. CONCLUSIONS

---

Until about twenty years ago, prior to the advent of powerful numerical techniques represented mainly by the finite element method, the analysis of embankment dams had to rely on the limit equilibrium concept. This concept is still valid and widely used. It will remain so until the gap between the analyses of working and collapse conditions of earth structures is satisfactorily closed. While research effort is directed towards this goal, it is still customary in engineering to separate these two conditions.

This report deals with both of these, but more attention has been given to the finite element method. This is because the method has filled an urgent need for better understanding of stresses and movements in dams under working conditions — something which the limit equilibrium concept cannot provide.

In its development for application to embankment dams the finite element method has passed through several important stages. First there was the development of theoretical concepts, this was followed by parametric studies of model dams, and eventually by successful back-analyses of case histories. The final and certainly the most important step for a full utilisation of the method has been its implementation at the planning and design stages of large dam projects. The number of cases where the finite element method has been used at this level is constantly growing and shows that the method had now been fully accepted by the profession.

There are two specific areas where the method is of particular relevance. These are the assessment of a cracking potential and evaluation of field monitoring. The problem of cracking is closely related to hydraulic fracturing, which depends on the stress state and pore pressure development. Analytical techniques capable, at least in principle, of predicting all these phenomena have been outlined. With the increasing reliability of field instrumentation it is now customary to monitor construction and post-construction behaviour of embankment dams to a greater extent than previously. Judgement is not always sufficient to explain the data obtained and then the analysis of displacements, stresses and pore pressures is almost mandatory.

This report does not attempt to give the last word in an area developing so rapidly as the analysis of earth structures. It merely tries to provide a picture and some guidance based on more than a decade of progress. Undoubtedly similar syntheses will follow as experience is gained in modelling the measured performance of embankment dams.

## A N N E X E

### Facteurs de conversion des principales unités

#### Longueur.

1 m = 3,281 ft. (pieds)

#### Contrainte.

1 kPa (\*) = 0,0102 kg/cm<sup>2</sup> (kg = kg force)  
= 102,0 kg/m<sup>2</sup> (kg = kg force)  
= 10,20 tf/m<sup>2</sup> (tf = tonne force)  
= 0,0209 kips/sq. ft. (1 kips/sq. ft. = 1000 livres/pied carré)  
= 0,1450 p. s. i. (lb/sq. inch = livre/pouce carré)

(\*) 1 Pa = 1 Pascal = 1 Newton/mètre carré (N/m<sup>2</sup>)  
1 kPa = 10<sup>3</sup> Pascal  
1 MPa = 10<sup>6</sup> Pascal  
1 GPa = 10<sup>9</sup> Pascal

**A P P E N D I X**  
**Conversions for principal units**

**Length.**

1 m = 3.281 ft.

**Stress.**

1 kPa(\*) = 0.0102 kg/cm<sup>2</sup> (kg force implied)  
= 102.0 kg/m<sup>2</sup> (kg force implied)  
= 10.20 tf/m<sup>2</sup> (tf = tonnes forces)  
= 0.0209 kips/sq. ft. (kip = 1000 lb)  
= 0.1450 p. s. i. (lb/sq. inch)

(\*) "Pa" = "Pascal" = Newton/sq. metre (N/m<sup>2</sup>)  
kPa, MPa, GPa indicate 10<sup>3</sup>, 10<sup>6</sup>, 10<sup>9</sup> Pascal respectively.





## FIGURES

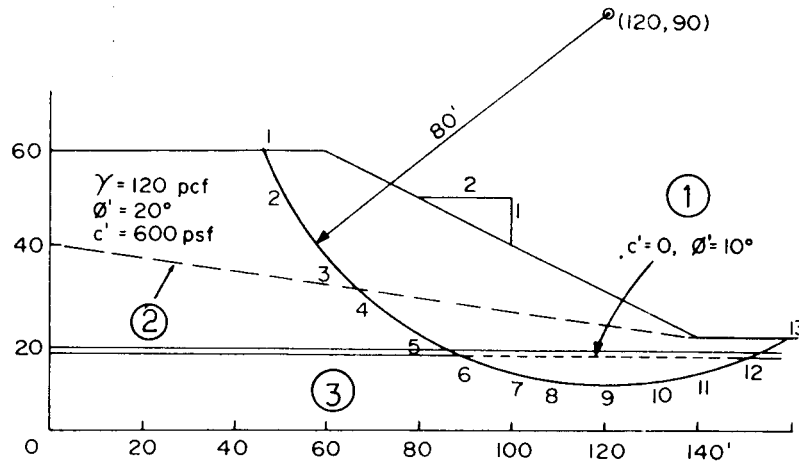


Fig. 2.1 Exemple de talus simple (d'après Fredlund et Krahn, 1976).  
*Example of simple slope (after Fredlund and Krahn, 1976).*

- (1) Condition 2 (couche faible).
- (2) Ligne piézométrique.
- (3) Fondation rocheuse.

- (1) Condition 2 (weak layer).
- (2) Piezometric line.
- (3) Bedrock.

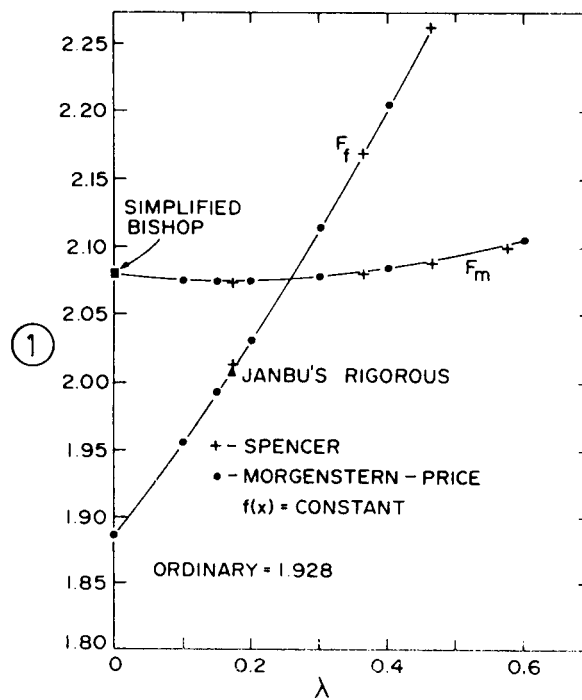
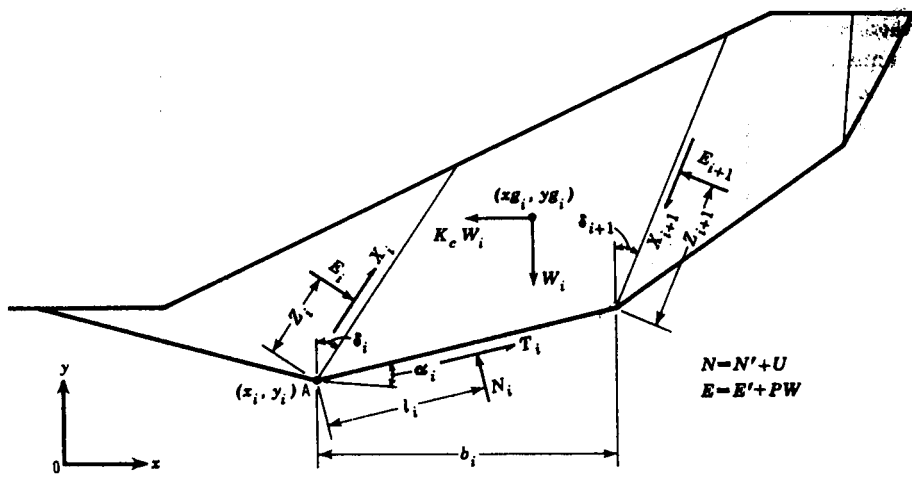


Fig. 2.2 Comparaison des coefficients de sécurité obtenus par différentes méthodes (d'après Fredlund et Krahn, 1976).

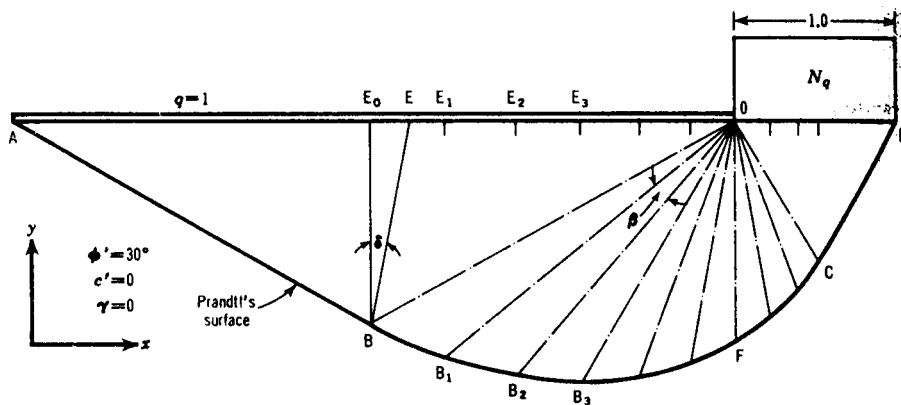
*Comparison of Factors of Safety for various methods (after Fredlund and Krahn, 1976).*

- (1) Coefficient de sécurité.

- (1) Factor of security.



(a)



(b)

Fig. 2.3

Illustrations de la méthode de Sharma  
(d'après Sharma, 1979).

Illustrations of Sharma method  
(after Sharma, 1979).

- |  |  |
|--|--|
| (a) Forces agissant sur une tranche inclinée.                      | (a) Forces acting on individual inclined slice.        |
| (b) Application de la méthode au problème de la capacité portante. | (b) Application of method to bearing capacity problem. |

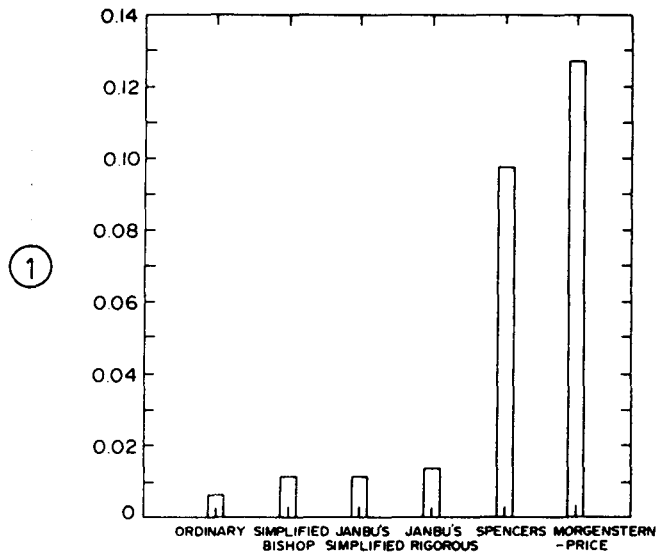


Fig. 2.4

Temps de calcul pour différentes méthodes  
(d'après Fredlund et Krahn, 1977).  
Computation time for various methods  
(after Fredlund and Krahn, 1977).

(1) Temps de calcul CPU par essai (minutes).

(1) CPU time per trial (minutes).

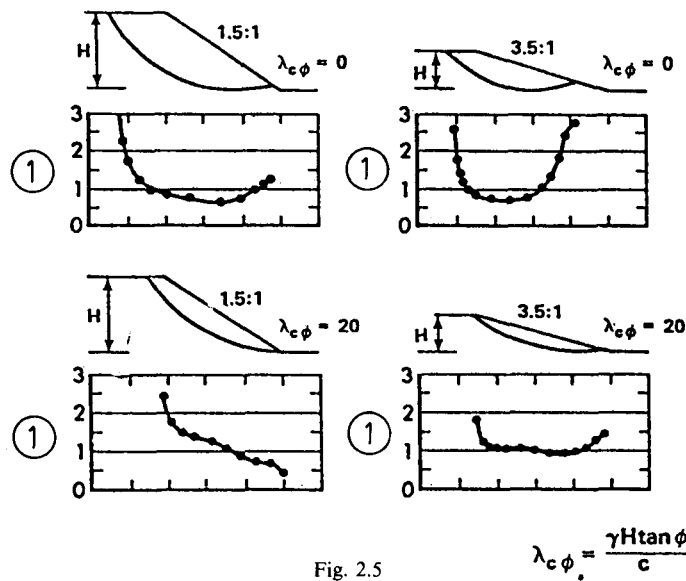


Fig. 2.5

Effet de la mobilisation non uniforme de la résistance au cisaillement  
(d'après Wright *et al.*, 1973).  
Effect of non-uniform mobilisation of shear strength  
(after Wright *et al.*, 1973).

(1) Coefficient de sécurité.

(1) Factor of safety.

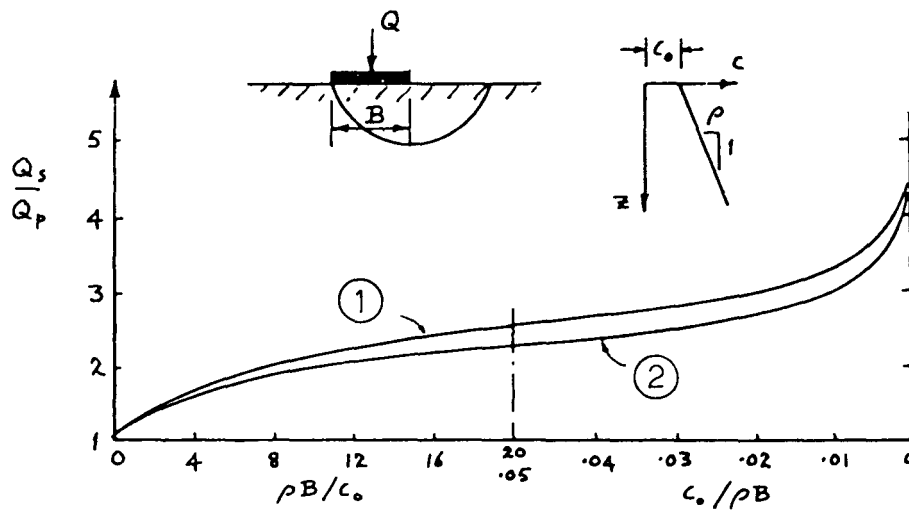


Fig. 2.6

Erreur du calcul par cercle de glissement pour une semelle rigide  
(d'après Davis et Booker, 1973).

*Error in slip circle analysis applied to a rigid footing  
(after Davis and Booker, 1973).*

$Q_s$  = charge de rupture pour un cercle de glissement.

$Q_s$  = slip circle collapse load.

$Q_p$  = charge de rupture pour la solution en plasticité.

$Q_p$  = plasticity solution collapse load.

(1) Semelle rugueuse.

(1) Rough footing.

(2) Semelle lisse.

(2) Smooth footing.

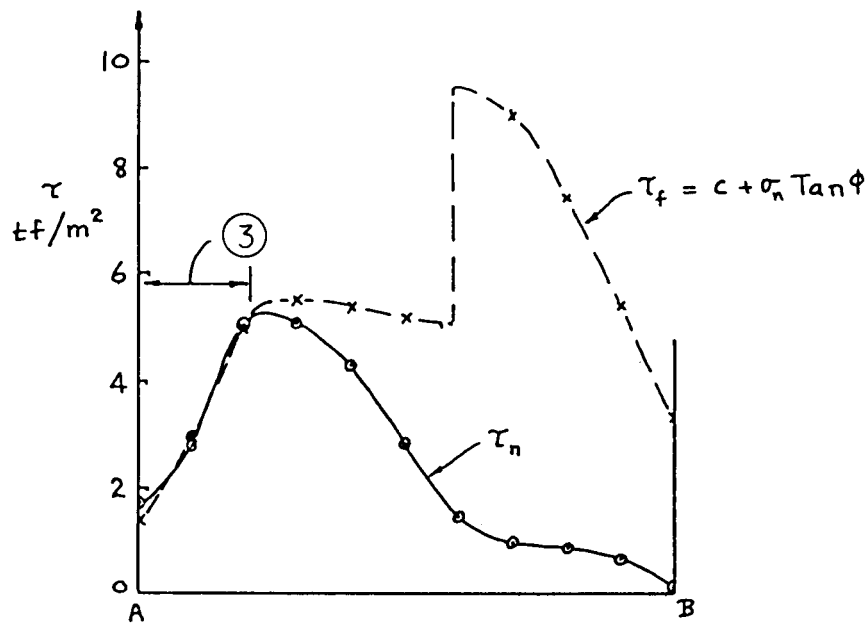
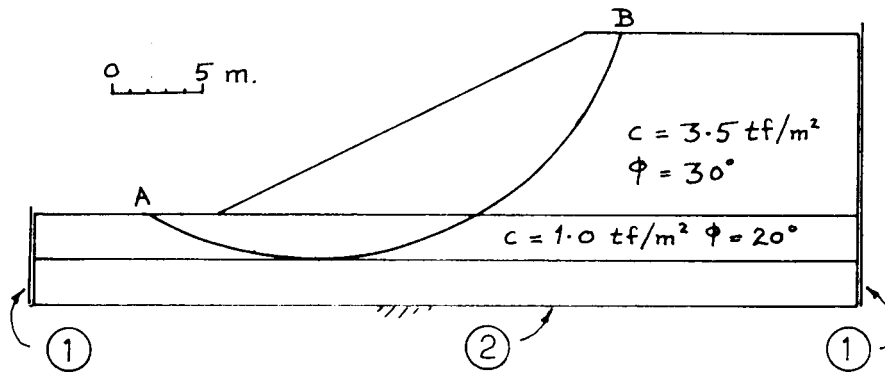


Fig. 2.7

Contrainte de cisaillement calculée par la méthode des éléments finis  
et distribution de la résistance au cisaillement  
le long de la surface de rupture.

*Finite element computed shear stress  
and strength distribution on trial surface.*

- (1) Lisse.
- (2) Fixe.
- (3) Plasticité locale.

- (1) Smooth.
- (2) Fixed.
- (3) Local yield.

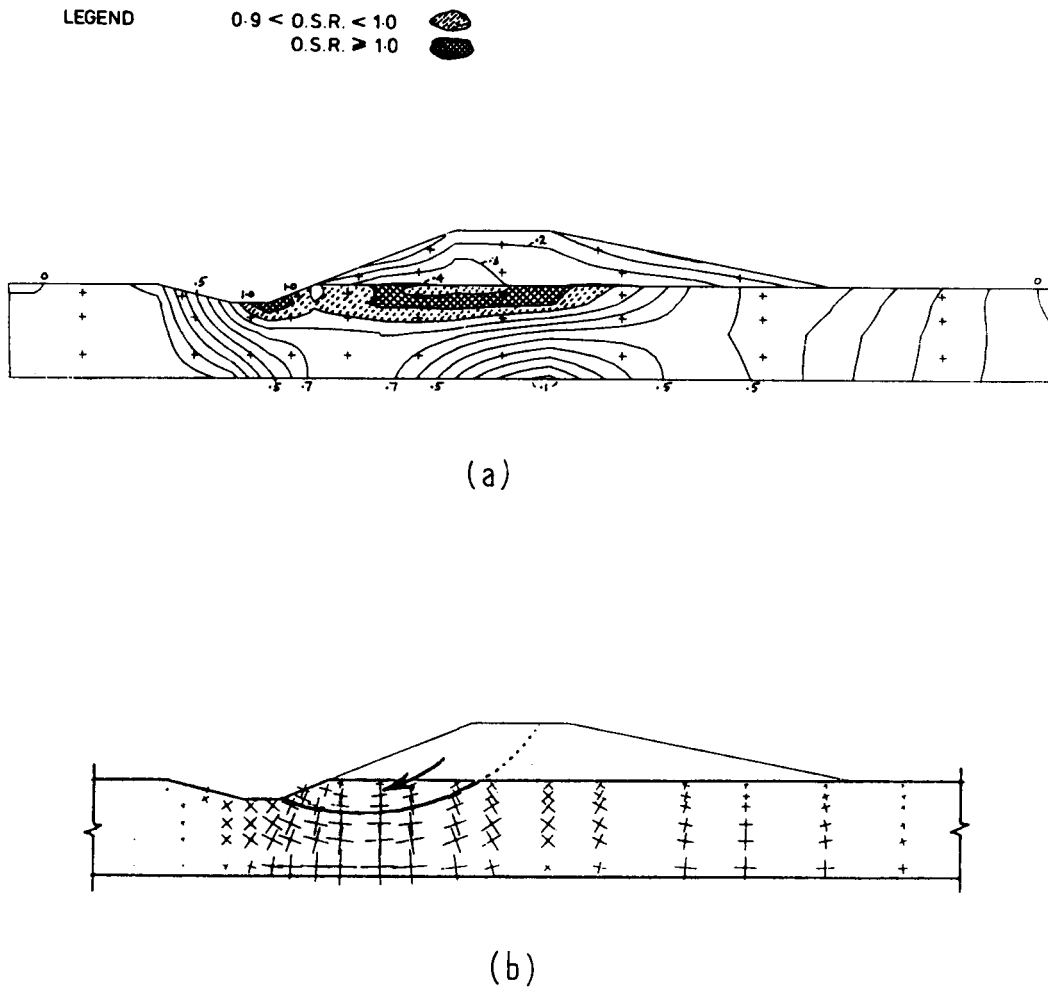


Fig. 2.8

Calculs par éléments finis du remblai d'essai d'Empingham.  
*Finite element studies on Empingham Trial Bank.*

- (a) Isovaleurs du rapport d'excès de contrainte (OSR) - rupture de la fondation presque complète (d'après Naylor, 1982 b). *(a) OSR contours - foundation yield nearly complete (after Naylor, 1982 b).*
- (b) Directions des lignes de glissement au voisinage de la rupture (d'après Naylor, 1982 a). *(b) Slip line directions close to collapse (after Naylor, 1982 a).*

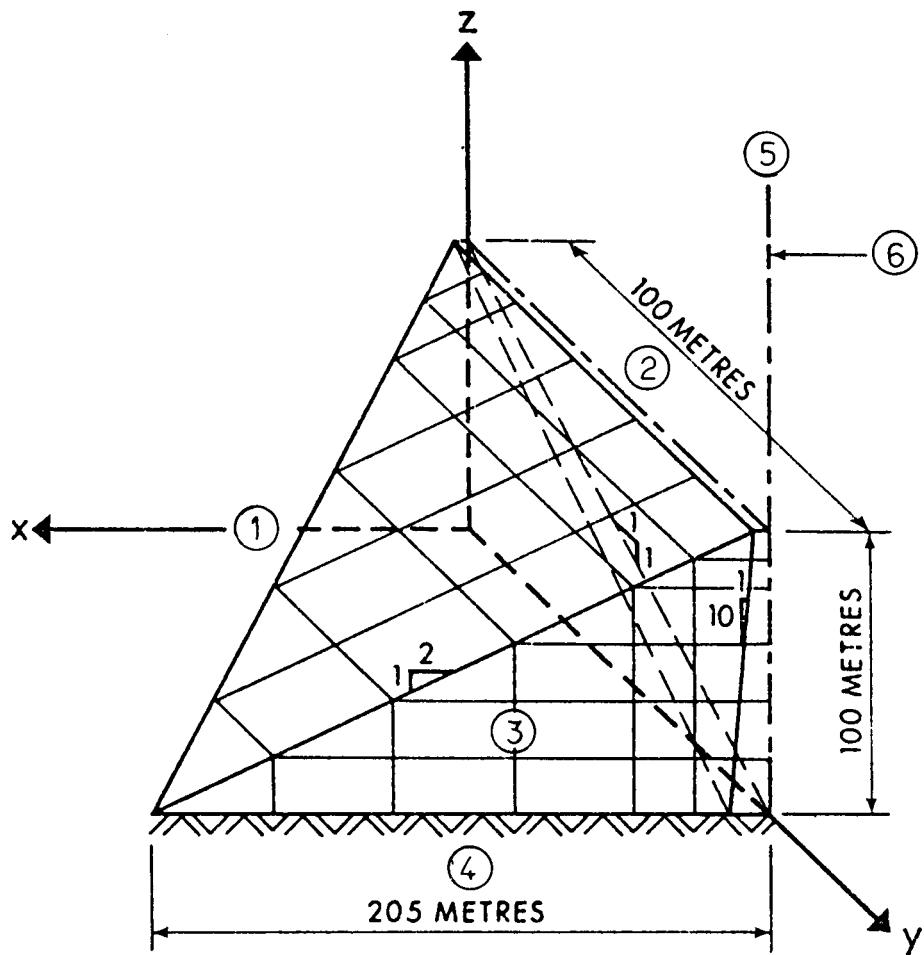


Fig. 3.1

Quadrant du modèle du barrage calculé en tridimensionnel  
(d'après Eisenstein *et al.*, 1972 a).

*Quadrant of model dam assumed in 3 D analysis  
(after Eisenstein *et al.*, 1972 a).*

- (1) Appui.
- (2) Crête.
- (3) Recharge.
- (4) Fond de vallée.
- (5) Noyau.
- (6) Axe de symétrie du barrage.

- (1) Abutment.
- (2) Crest.
- (3) Shoulder.
- (4) Valley bottom.
- (5) Core.
- (6) Axis of symmetry of the dam.



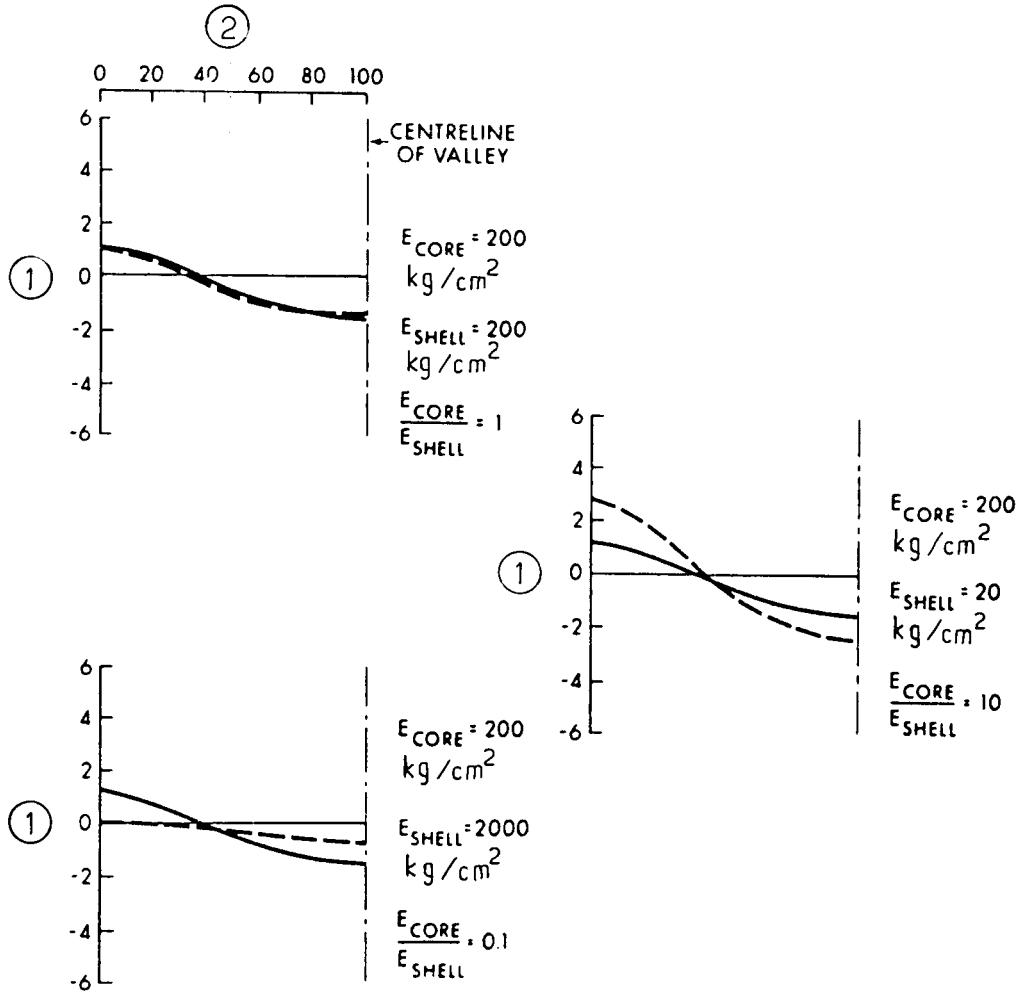


Fig. 3.2

Comparaison des contraintes horizontales le long de la crête pour les calculs bidimensionnel et tridimensionnel et pour différents rapports de modules entre noyau et recharge (d'après Eisenstein *et al.*, 1972 a).

*Comparison of horizontal stress along crest for 2 D and 3 D at different core to shell moduli ratios (after Eisenstein *et al.*, 1972 a).*

Calcul bidimensionnel. Calcul tridimensionnel.	————— -----	Twodim. analysis. Threedim. analysis.	
Dans tous les cas : $\nu = 0,35, \gamma = 1,96/\text{cm}^3$ .		All cases : $\nu = 0.35, \gamma = 1.96/\text{cm}^3$ .	
$E_{\text{noyau}}$		$E_{\text{core}}$	
$E_{\text{recharge}}$		$E_{\text{shell}}$	
(1) Contraintes horizontales en crête ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) (+ = tractions).		(1) Horizontal stresses at crest ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) (Tension positive).	
(2) Distances à l'appui (m).		(2) Distance from abutment (m).	

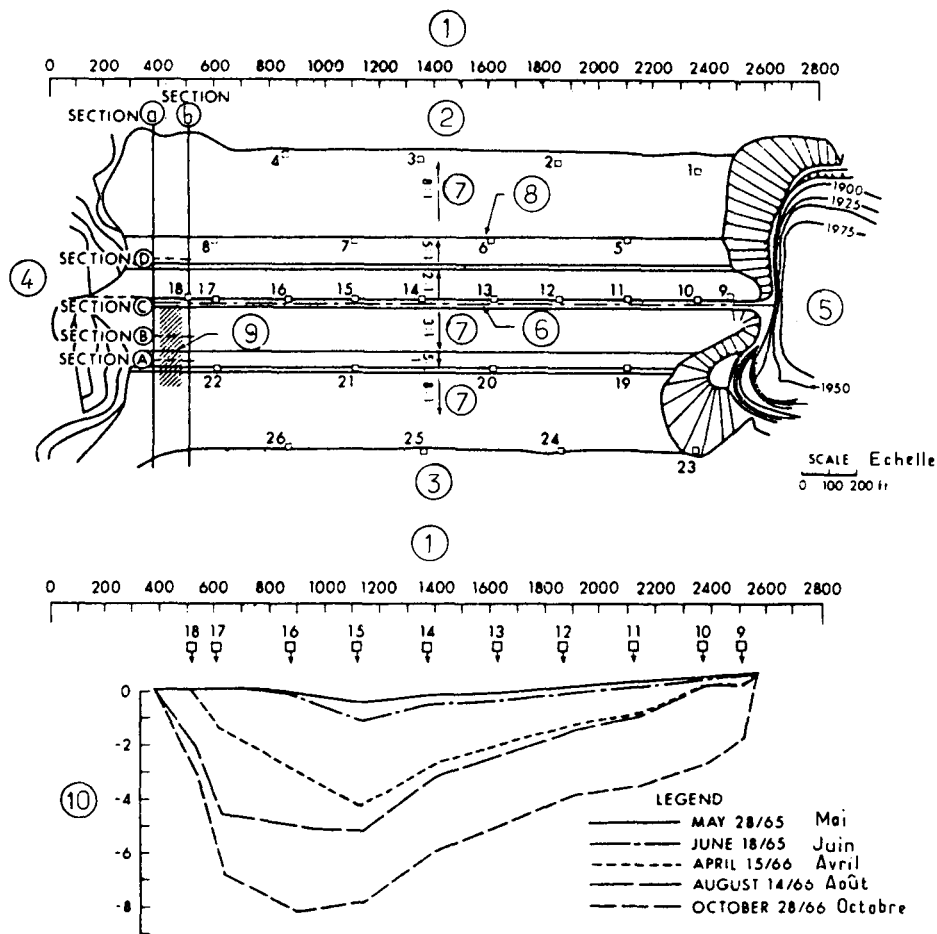


Fig. 3.3

Barrage de Duncan  
 Vue en plan et profils longitudinaux des tassements  
 (d'après Eisenstein *et al.*, 1972 b).

*Plan of Duncan Dam with longitudinal settlement profile  
 (after Eisenstein et al., 1972 b).*

- |   |  |
|---|--|
| (1) Distances le long de la crête (pieds).                                      | (1) Distance along crest (ft).                               |
| (2) Aval.   | (2) Downstream.  |
| (3) Amont.  | (3) Upstream.  |
| (4) Appui rive gauche.  | (4) Left abutment.   |
| (5) Appui rive droite.  | (5) Right abutment.  |
| (6) Axe du barrage.   | (6) Centre line of dam.                                      |
| (7) Pente.  | (7) Slope.   |
| (8) Numéro de l'appareil de mesure des tassements.                              | (8) Settlement gauge number.                                 |
| (9) Zone des fissures.  | (9) Area of cracks.  |
| (10) Tassements (pieds) le long de l'axe des appareils de mesures (nos 9 à 18). | (10) Settlement (ft) along centre line gauges (nos 9 to 18). |

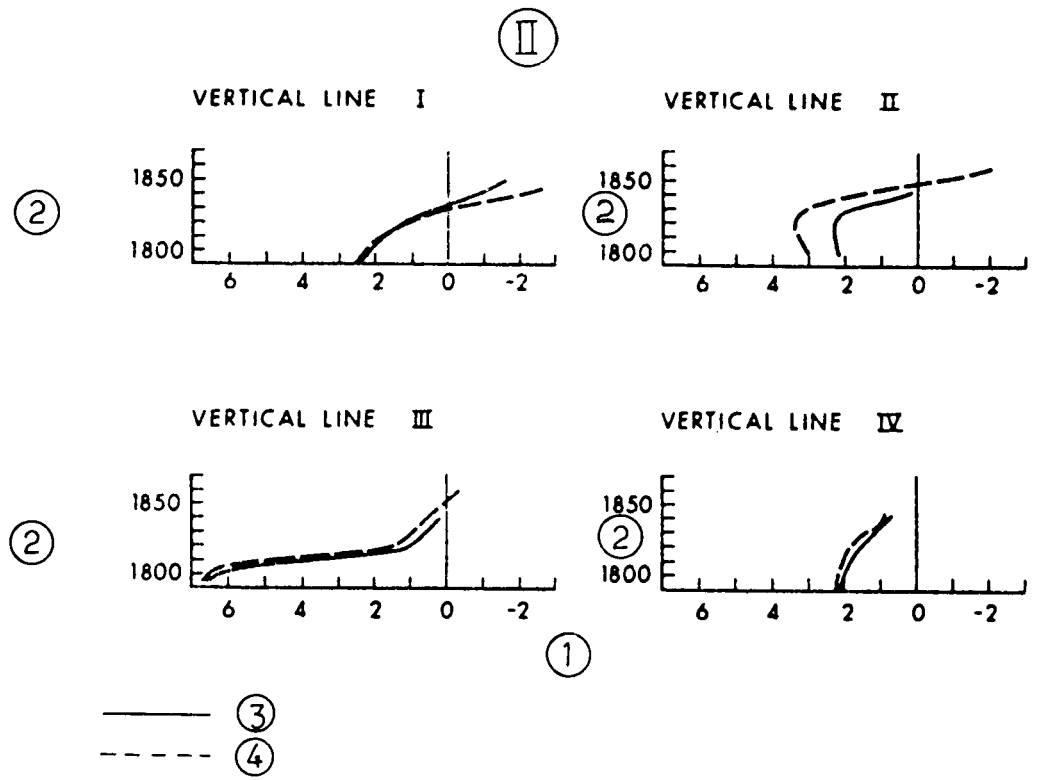
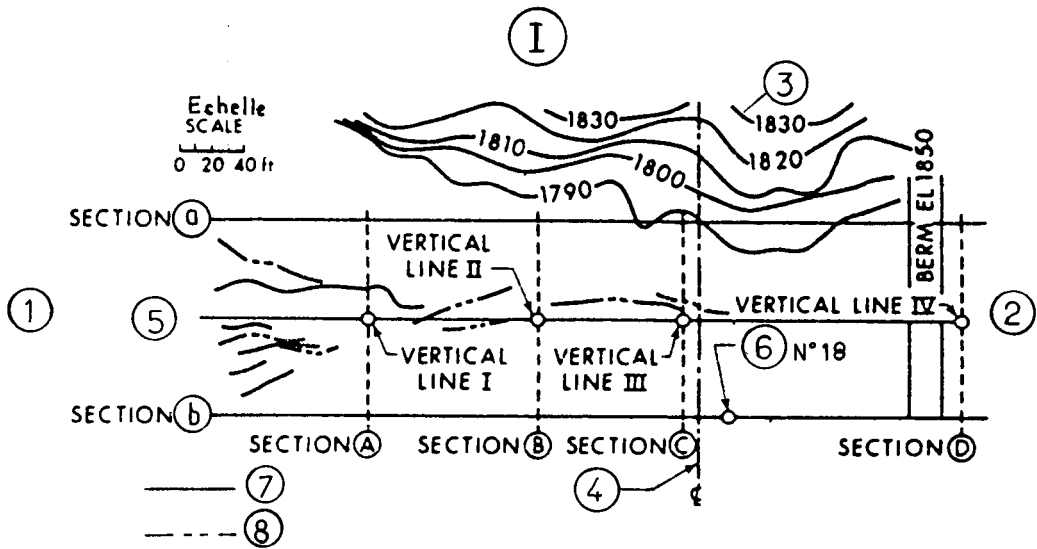


Fig. 3.4

Barrage de Duncan - Comparaison de la fissuration réelle  
avec les résultats du calcul tridimensionnel des contraintes  
(d'après Eisenstein *et al.*, 1972 b).

*Comparison of actual crack development  
in Duncan Dam with results of 3 D stress analysis  
(after Eisenstein et al., 1972 b).*

I. Vue en plan des zones de fissures.

*I. Plan view of area of cracks.*

- |  |   |
|--|---|
| (1) Amont.   | (1) <i>Upstream side.</i>                               |
| (2) Aval.  | (2) <i>Downstream side.</i>                             |
| (3) Lignes de niveau du rocher rive gauche.            | (3) <i>Left abutment rock contours.</i>                 |
| (4) Axe du barrage.                                    | (4) <i>Centre line of dam.</i>                          |
| (5) Section située à 440 pieds de l'appui rive gauche. | (5) <i>Section at distance 440' from left abutment.</i> |
| (6) Appareil de mesure de tassements n° 18.            | (6) <i>Settlement gauge n° 18.</i>                      |
| (7) Fissures le 14 août 1966.                          | (7) <i>August 14th 1966 cracks.</i>                     |
| (8) Fissures le 28 octobre 1966.                       | (8) <i>October 28th 1966 cracks.</i>                    |

II. Résultats du calcul des contraintes.

*II. Stress analysis results.*

- |  |  |
|--|--|
| (1) Contrainte principale minimale (kilolivre par pied carré). | (1) <i>Minimum principal stress (ksf).</i> |
| (2) Cote (pieds).  | (2) <i>Elevation (ft).</i>                 |
| (3) 14 août 1966.  | (3) <i>August 14th 1966.</i>               |
| (4) 28 octobre 1966.   | (4) <i>October 28th 1966.</i>              |

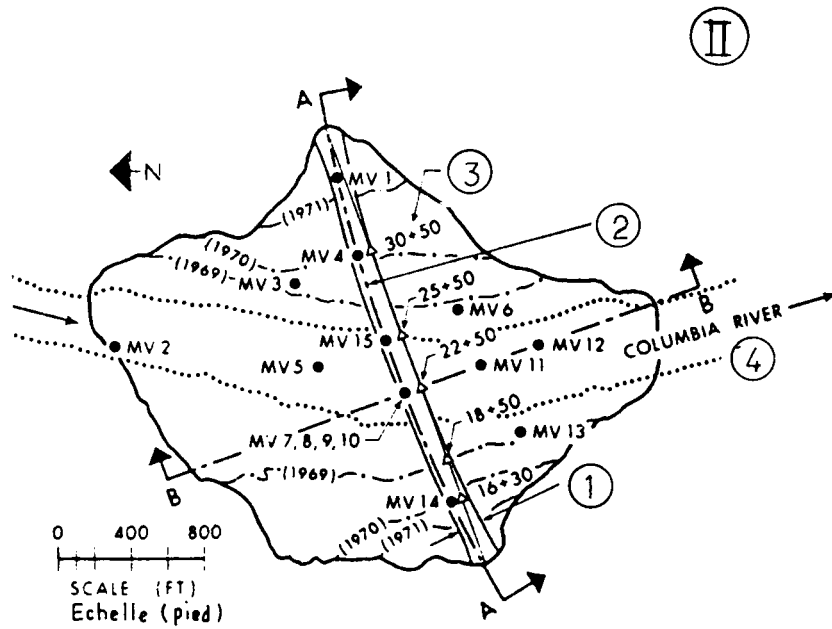
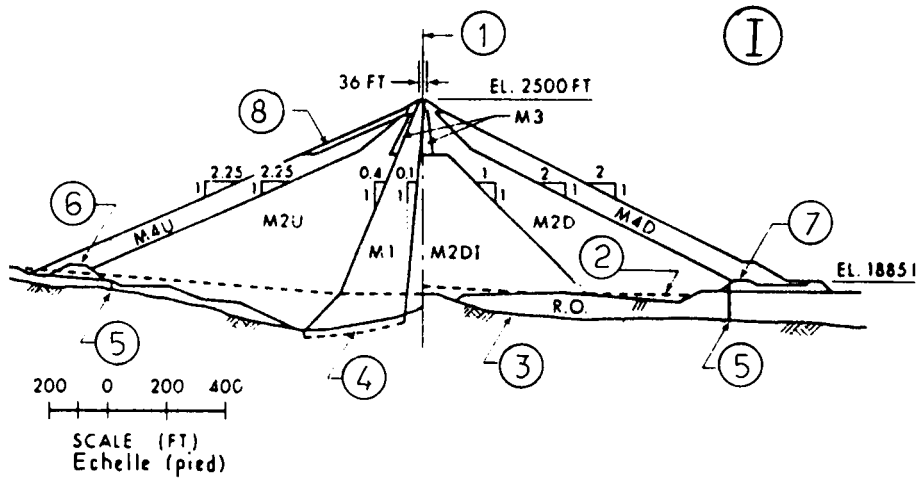


Fig. 3.5

Barrage de Mica - Profil en travers principal et vue en plan  
(d'après Eisenstein et Simmons, 1975).

*Main transverse section and plan of Mica Dam  
(after Eisenstein and Simmons, 1975).*

I. Profil en travers principal.

*I. Main section.*

(1) Axe du barrage.	(1) Dam axis.
(2) Lit de la rivière.	(2) Original riverbed.
(3) Bedrock.	(3) Bedrock.
(4) Tapis d'injection.	(4) Blanket grouting.
(5) Puits.	(5) Tube well.
(6) Batardeau amont.	(6) Upstream c'dam.
(7) Batardeau aval.	(7) Downstream c'dam.
(8) Zone de baisse du plan d'eau.	(8) Drawdown zone.

Zone	Description	Zone	Description.
M 1	Noyau en moraine argileuse (couches de 25 cm).	M 1	Core, glacial till in 25 cm (10') layers.
M 2	Recharge principale, en sable et gravier (couches de 30 cm passant à 45 cm pendant la construction).	M 2	Main shell, sand and gravel in 30 cm (12') layers, changed during construction to 45 cm (18') layers.
M 2 D 1	Zone interne en matériaux M 2 de faible qualité.	M 2 D 1	Inner zone of poorer M 2 materials.
M 3	Zone support du noyau, en sable et gravier ou enrochement (couches de 15 cm).	M 3	Core support zone, sand and gravel or rock in 15 cm (6") layers.
M 4	Recharge externe en sable et gravier ou enrochement (couches de 60 cm).	M 4	Outer shell, sand and gravel or rock in 60 cm (24") layers.
Zone de baisse du plan d'eau	Gravier, cailloux, blocs ou enrochement (couches de 60 cm).	Drawdown zone	Gravel, cobbles and boulders or rock in 60 cm (24") layers.
RO	Terrain de couverture en place.	RO	Original River Overburden.

II. Vue en plan.

*II. Plan view.*

(1) Crête du barrage coté 2 500 pied (1972).	(1) Dam crest el. 2 500 ft (1972).
(2) Axe du barrage (rayon 10 000 pieds).	(2) Dam axis 10 000 ft R.
(3) Stations le long de la corde.	(3) Stations along long chord.
(4) Niveau d'eau aval (cote 1 880 pieds).	(4) Tailwater el. 1 880 ft.
MV 8 Sonde n° 8 de mesure des mouvements verticaux (ou presque).	MV 8 Vertical (or near-vertical) movement gauge no. 8, etc.
(1969) Profil à la fin de la période de construction 1969, etc.	(1969) Profile at end of 1969 construction season, etc.
A-A Coupe centrale longitudinale.	A-A Longitudinal central section.
B-B Coupe transversale principale « déformation plane ».	B-B Main transverse "plane strain" section.

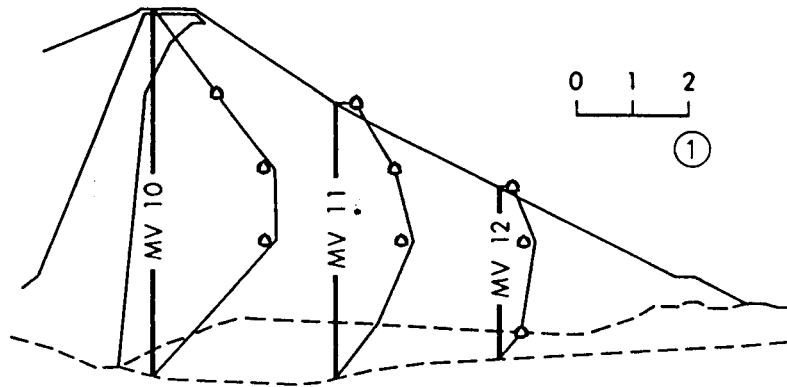


Fig. 3.6

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés  
avec les résultats des calculs par la méthode des éléments finis  
(bidimensionnel et tridimensionnel)  
(d'après Eisenstein et Simmons, 1975).

*Comparison of observed settlement with results of 2 D and 3 D  
finite element analysis of Mica Dam  
(after Eisenstein and Simmons, 1975).*

▲ Calcul tridimensionnel.  
● Calcul bidimensionnel.  
— Mesures *in situ*.  
(1) Tassement (pieds).

▲ Three-dimensional analysis.  
● Two-dimensional analysis.  
— Field observation.  
Settlement (feet).

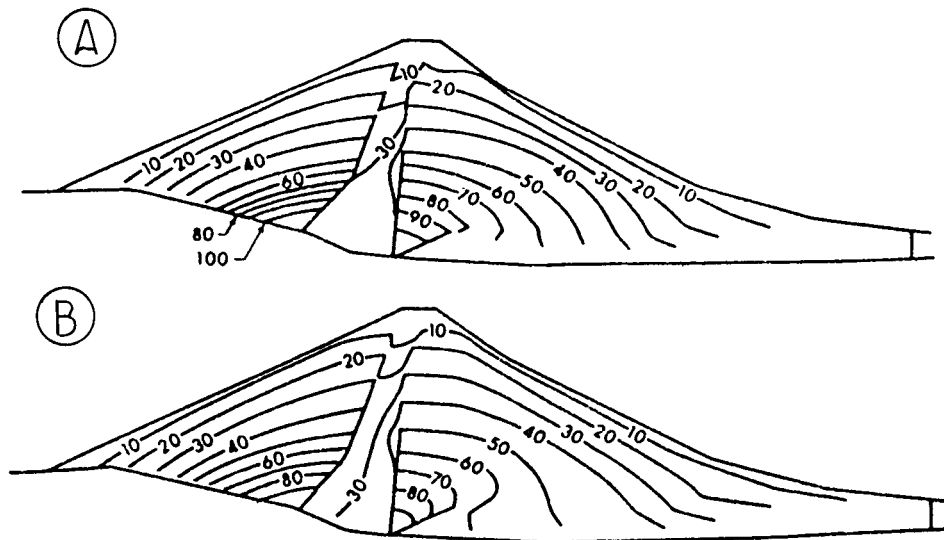


Fig. 3.7

Barrage de Mica - Isovaleurs des contraintes principales maximales  
(en kilolivres par pied carré)  
tirées des calculs par la méthode des éléments finis  
(bidimensionnel et tridimensionnel)  
(d'après Eisenstein et Simmons, 1975).

*Major principal stress contours (kips/sq. ft) from 2 D and 3 D  
finite element analyses of Mica Dam  
(after Eisenstein and Simmons, 1975).*

(A) Calcul bidimensionnel (déformation plane).  
(B) Calcul tridimensionnel.

(A) Two-dimensional (plane strain).  
(B) Three-dimensional.

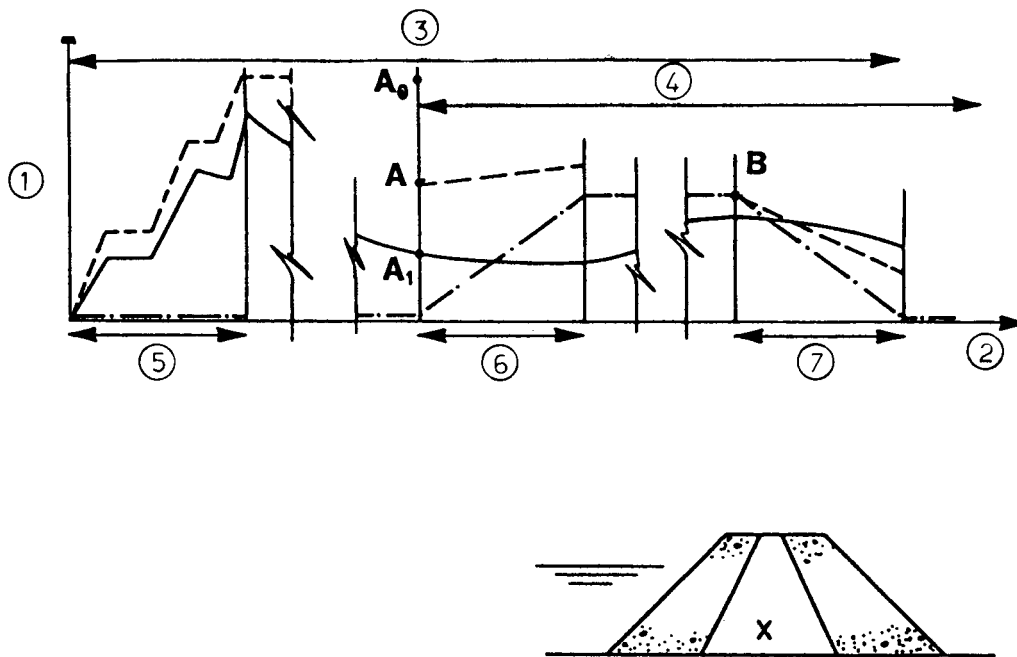


Fig. 4.1

Histoire des pressions interstitielles dans un barrage à noyau central argileux.

*Pore pressure history in central clay' core dam.*

- (1) Pression interstitielle  $u$ , au point X.  
 (2) Temps.  
 (3) Dissipation des pressions interstitielles de construction.  
 (4) Établissement du régime permanent.  
 (5) Construction.  
 (6) Mise en eau.  
 (7) Vidange.  
 ——— Vidange-type réalisée.  
 - - - - Noyau non drainé.  
 - · - · - Noyau drainé.  
 $u$ , est choisi en A et B pour correspondre aux conditions (par exemple, en B,  $u$ , = valeur du régime permanent).

- (1) Pore pressure at X( $u$ ,).  
 (2) Time.  
 (3) Construction pore pressure dissipate.  
 (4) Study seepage developp.  
 (5) Construction.  
 (6) Reservoir filling.  
 (7) Drawdown.  
 ——— Actual (typical).  
 - - - - Undrained core.  
 - · - · - Drained core.  
 $u$ , at A and B chosen to suit conditions (e.g. at B,  $u$ , = steady seepage value).



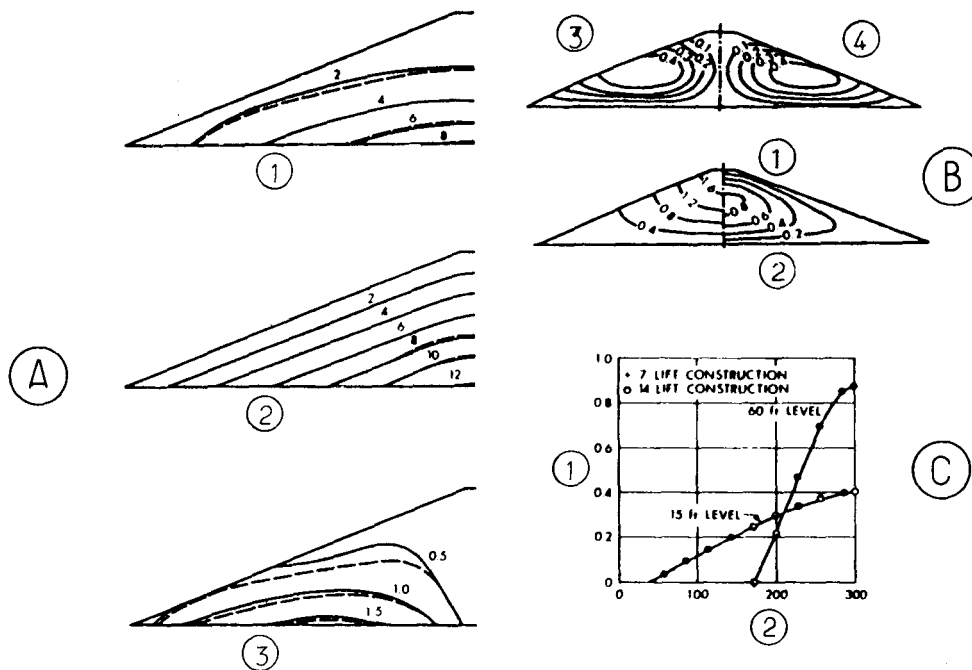


Fig. 4.2

Effets du calcul couche par couche sur les déplacements et les contraintes dans un barrage en remblai homogène (d'après Clough and Woodward, 1967).

*Effects of incremental analysis on displacements and stresses in homogeneous embankment (after Clough and Woodward, 1967).*

- (A) Isolaveurs des contraintes dues au poids propre dans un barrage standard, pour une construction en une seule couche ou en plusieurs couches.  
 --- Une seule couche.  
 — 10 couches.
- (1) Contrainte normale horizontale  $\sigma_x$  (kilolivre/pied carré).  
 (2) Contrainte normale verticale  $\sigma_y$  (kilolivre/pied carré).  
 (3) Contrainte de cisaillement  $\tau$  (kilolivre/pied carré).
- (B) Déplacements dus au poids propre dans un barrage standard.  
 (1) Déplacement horizontal (pied).  
 (2) Déplacement vertical (pied).  
 (3) Une seule couche.  
 (4) 10 couches.
- (C) Déplacements dans un barrage standard pour une construction en 7 ou 14 couches.  
 (1) Déplacement vertical (pied).  
 (2) Distance du pied aval (pied).  
 ● Construction en 7 couches.  
 ○ Construction en 14 couches.
- (A) Stress contours for single and multiple lift construction due to dead weight in standard dam.  
 --- Single lift.  
 — 10-lift increments.
- (1) Horizontal normal stress  $\sigma_x$  (kips/ft<sup>2</sup>).  
 (2) Vertical normal stress  $\sigma_y$  (kips/ft<sup>2</sup>).  
 (3) Shear stress  $\tau$  (kips/ft<sup>2</sup>).
- (B) Displacements due to dead weight in standard dam.  
 (1) Horizontal displacement (ft).  
 (2) Vertical displacement (ft).  
 (3) Single lift.  
 (4) 10-lift increments.
- (C) Displacements in standard dam : seven and fourteen-lift construction.  
 (1) Vertical displacement (ft).  
 (2) Distance from toe (ft).  
 ● 7-lift construction.  
 ○ 14-lift construction.

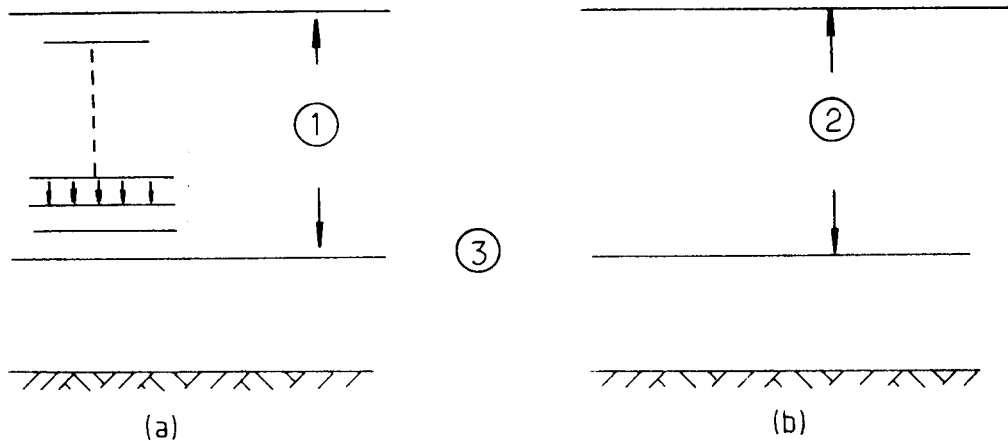


Fig. 4.3

Construction par couches ou par incréments de charge.  
pour un cas unidimensionnel.

*Alternatives of layers or increments for one dimensional case.*

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\alpha$ appliqué à chacune des $n$ couches en sé-<br>quence.              | (1) $\alpha$ applied to each of $n$ layers in sequence.                 |
| (2) Pesanteur appliquée en $n$ incréments de $\alpha/n$<br>à une seule couche. | (2) Gravity applied in $n$ increments of $\alpha/n$ to single<br>layer. |
| (3) Repère.  | (3) Marker.   |

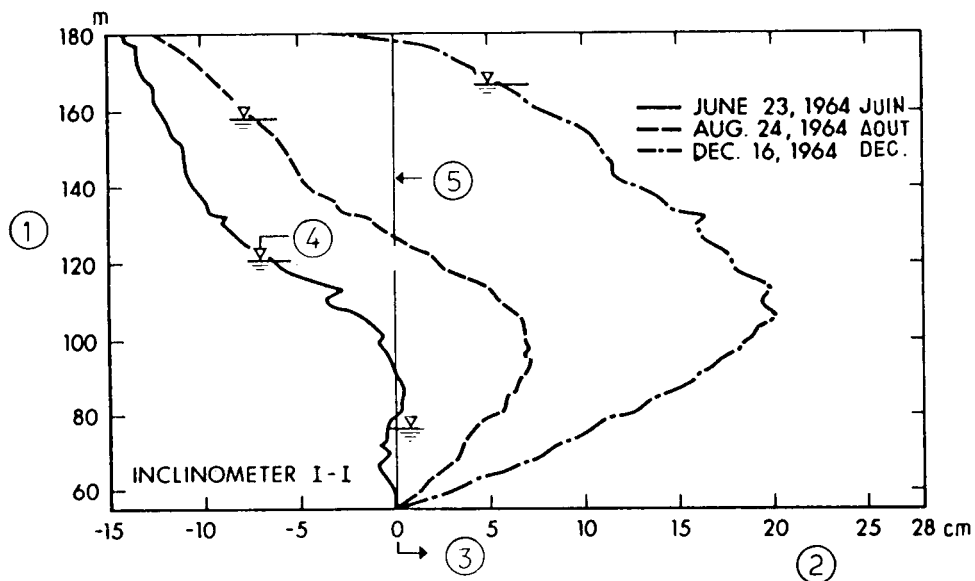


Fig. 4.4

Barrage d'El Infiernillo - Déplacements horizontaux du noyau  
au cours de la mise en eau  
(d'après Marsal et Ramirez, 1967).

*Horizontal displacements of core in El Infiernillo dam after reservoir filling  
(after Marsal and Ramirez, 1967).*

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| (1) Cotes au-dessus du niveau de la mer (m). | (1) Elevations above sea level (m). |
| (2) Déplacements horizontaux (cm).           | (2) Horizontal distances (cm).      |
| (3) Vers l'aval.                             | (3) Downstream.                     |
| (4) Niveau de la retenue.                    | (4) Pool elevation.                 |
| (5) Ligne de référence.                      | (5) Base line.                      |

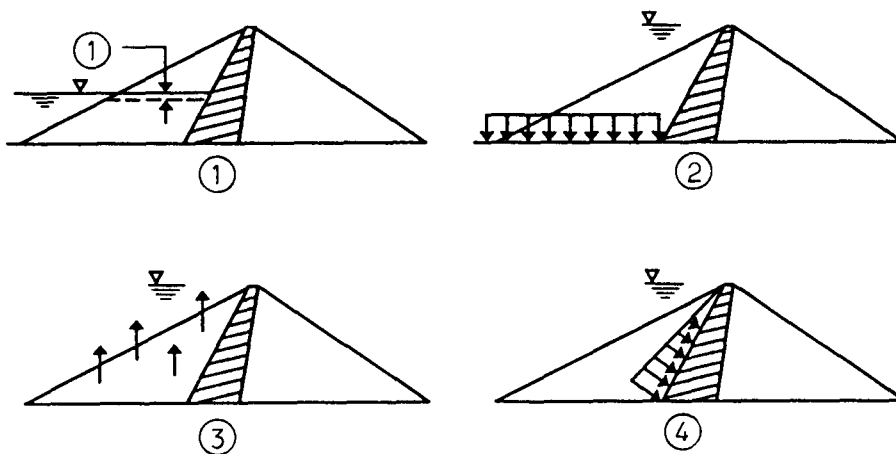


Fig. 4.5

Effets du remplissage de la retenue sur un barrage zoné  
(d'après Nobari et Duncan, 1972).

*Effects of reservoir filling on a zoned dam  
(after Nobari and Duncan, 1972).*

- |  |  |
|--|--|
| (1) Tassement dû à la saturation de la recharge amont. | (1) Collapse due to wetting upstream shell material. |
| (2) Pression de l'eau sur la fondation.                | (2) Water load on foundation.                        |
| (3) Poussée d'Archimède sur la recharge amont.         | (3) Buoyant uplift on upstream shell.                |
| (4) Pression de l'eau sur le noyau.                    | (4) Water load on core.                              |

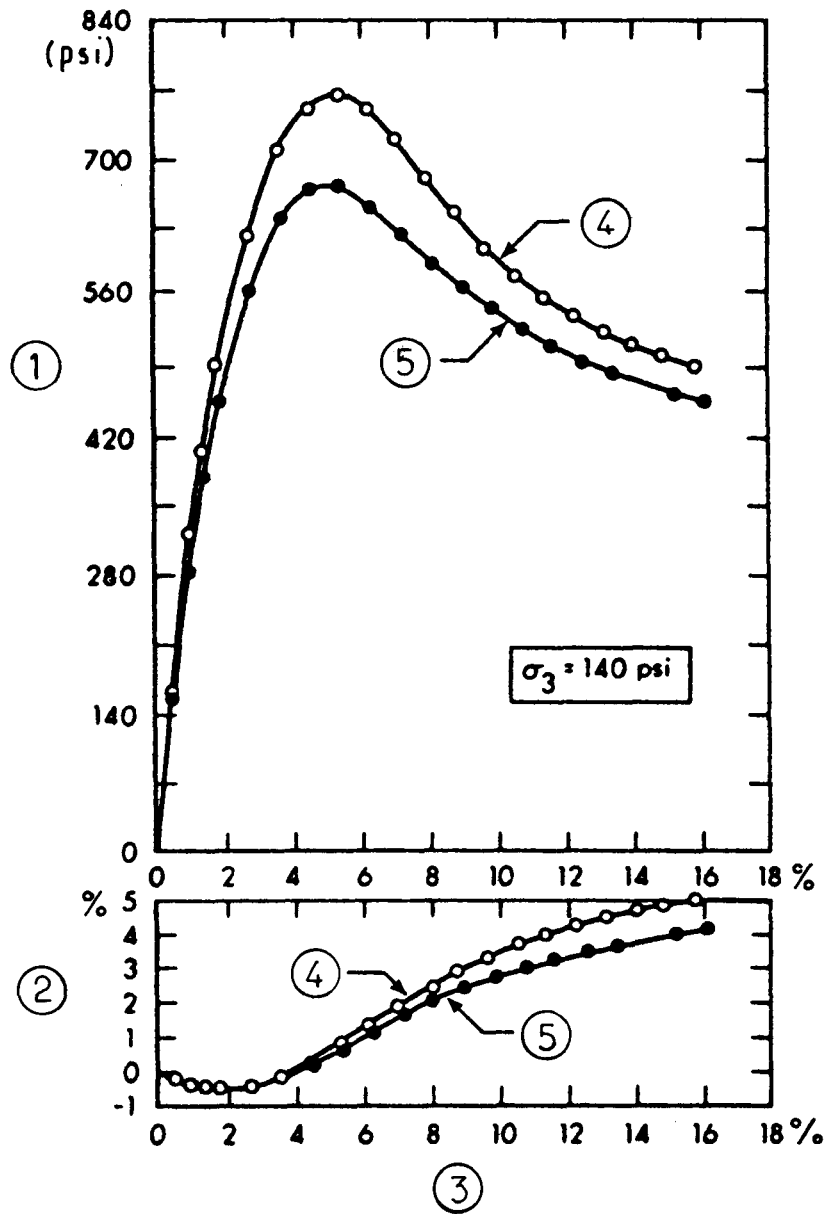


Fig. 4.6

Barrage d'Oroville - Résultats d'essais triaxiaux sur des échantillons secs et humides du matériau (d'après Nobari et Duncan, 1972).

*Triaxial test results for dry and wet specimens, Oroville material (after Nobari and Duncan, 1972).*

Matériau du barrage d'Oroville passant au tamis n° 6 DR  $\cong$  100 %.  
*Oroville dam material finer than n° 6 sieve DR  $\cong$  100 %.*

- (1) Déviateur de contrainte  $\sigma_1 - \sigma_3$  (psi).
- (2) Déformation volumique  $\epsilon_v$  (%).
- (3) Déformation axiale  $\epsilon_a$  (%).
- (4) Sec.
- (5) Humide.

- (1) Stress difference  $\sigma_1 - \sigma_3$  (psi).
- (2) Volume strain  $\epsilon_v$  (%).
- (3) Axial strain  $\epsilon_a$  (%).
- (4) Dry.
- (5) Wet.

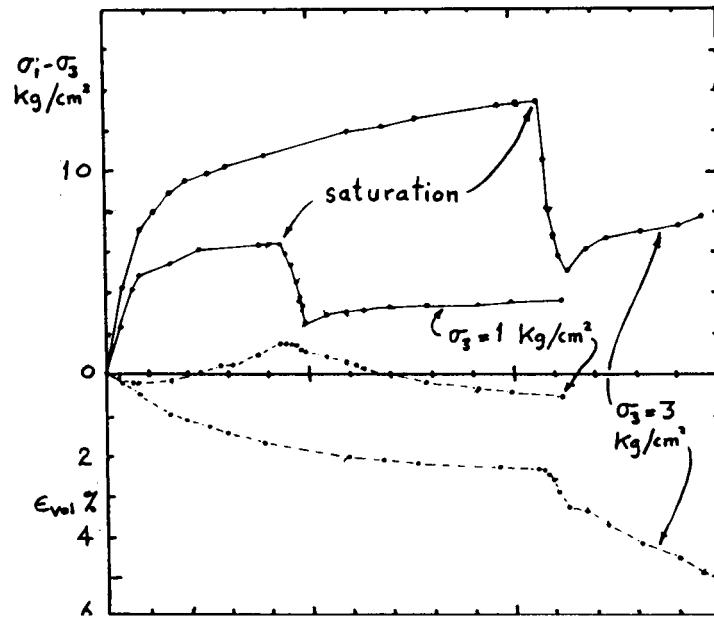


Fig. 4.7

Courbes de triaxial pour des enrochements initialement secs montrant l'effet de la saturation (d'après LNEC, Lisbonne).

*Triaxial curves for initially dry rockfill showing the effect of saturation (courtesy of LNEC, Lisbon).*

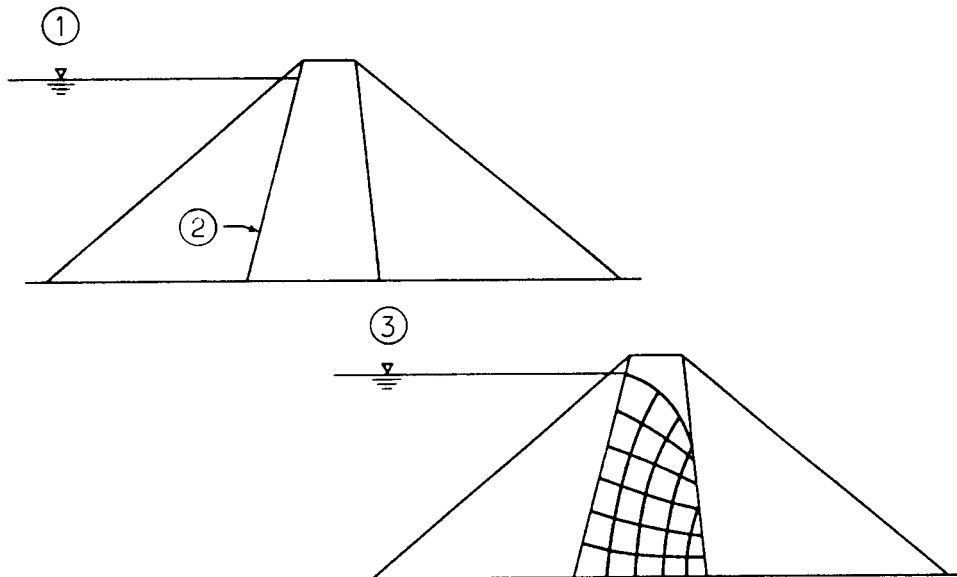


Fig. 4.8

Comparaison des conditions de chargement lors de la première mise en eau et en régime permanent.

*Comparison of first filling and steady seepage loading conditions.*

- (1) Niveau de première mise en eau.
- (2) Membrane supposée imperméable.
- (3) Niveau en régime permanent.

- (1) First filling stage.
- (2) Assumed impermeable membrane.
- (3) Steady seepage stage.

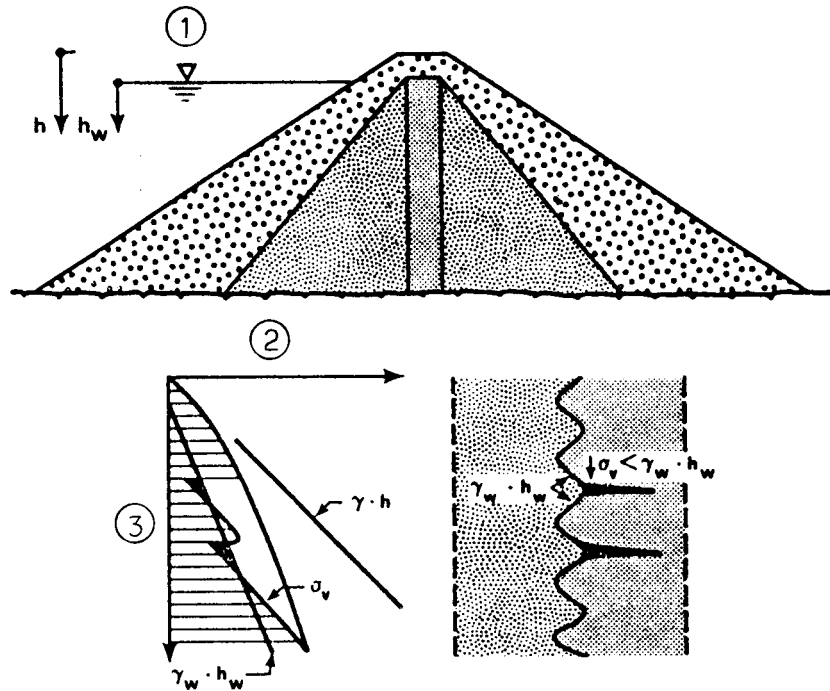


Fig. 4.9

Hypothèse adoptée pour expliquer la fracturation hydraulique (d'après Kjaernsli et Torblaa, 1968).

*Hypothesis used to explain hydraulic fracturing (after Kjaernsli and Torblaa, 1968).*

- (1) PHE (niveau des plus hautes eaux).
- (2) Pression.
- (3) Profondeur.

- (1) HWL (High water level).
- (2) Pressure.
- (3) Depth.

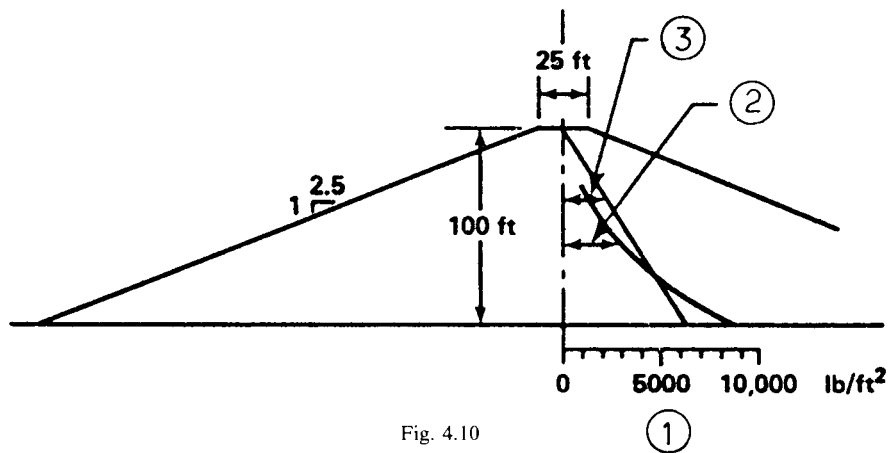


Fig. 4.10

Comparaison de la pression hydrostatique avec la contrainte totale horizontale sur l'axe du barrage (d'après Sherard, 1973).

*Comparison of hydrostatic pressure with horizontal total stress on dam centre line (after Sherard, 1973).*

- (1) Pression (lb/ft<sup>2</sup> - livre par pied carré).
- (2) Contrainte horizontale sur l'axe du barrage, calculée par la méthode des éléments finis.
- (3) Pression dans un forage plein d'eau = 62.4 h.

- (1) Pressure (lb/ft<sup>2</sup>).
- (2) Horizontal embankment stress on dam axis computed by the finite element method.
- (3) Pressure in water-filled borehole = 62.4 h.

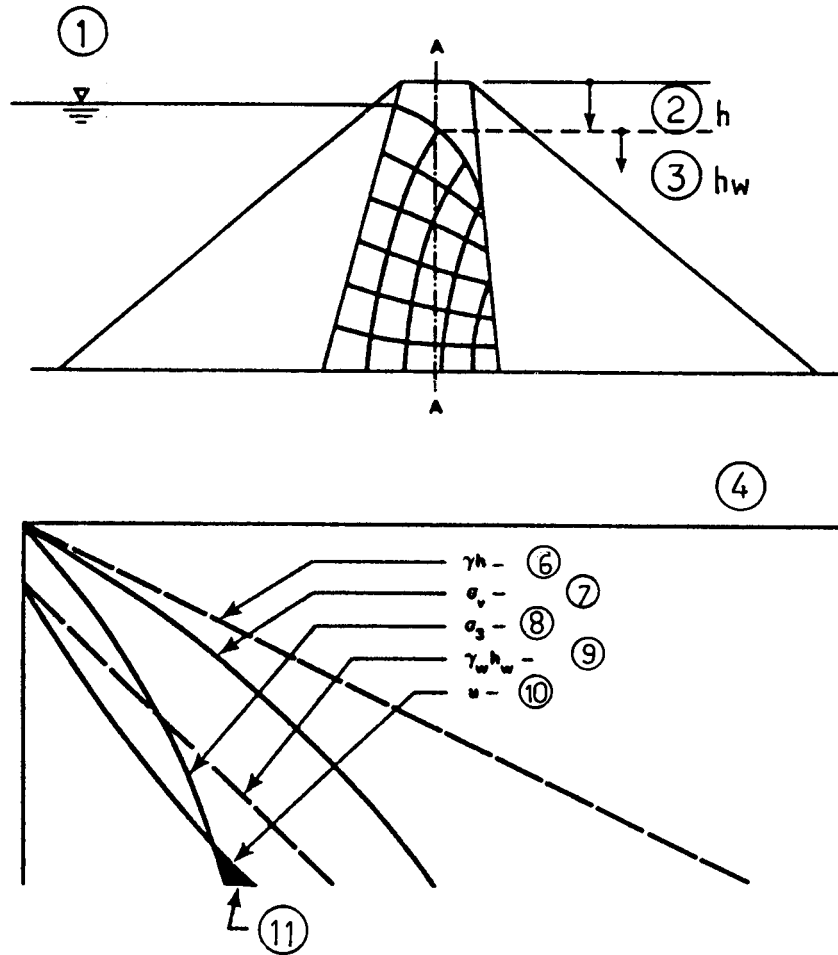
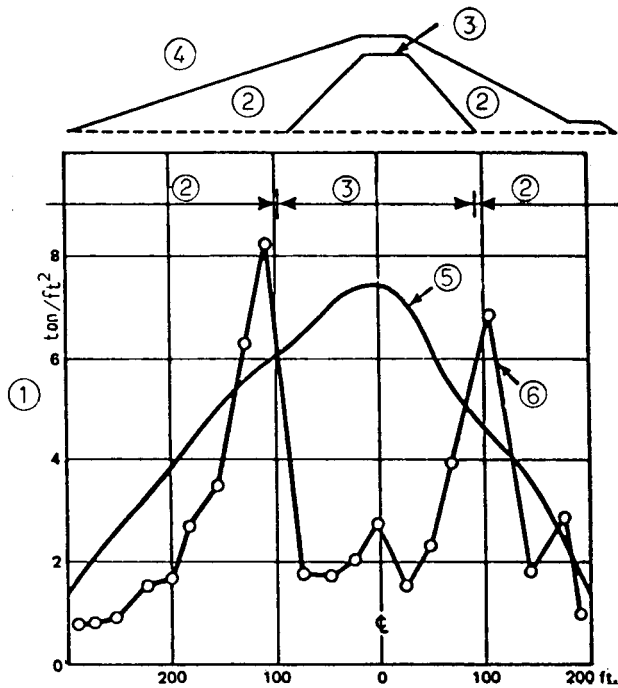


Fig. 4.11

Pressions agissant dans le noyau en régime permanent.

*Pressures acting in core during steady seepage.*

- |  |   |
|--|---|
| (1) Réseau d'écoulement.   | (1) Flow net.                                     |
| (2) Profondeur $h$ .   | (2) Depth $h$ .                                   |
| (3) Profondeur $h_w$ .   | (3) Depth $h_w$ .                                 |
| (4) Pressions le long de l'axe A-A.                                | (4) Pressure diagram along A-A axis.              |
| (5) Profondeur $h$ .   | (5) Depth $h$ .                                   |
| (6) $\gamma h$ - Poids des terres.                                 | (6) $\gamma h$ - Overburden total.                |
| (7) $\sigma_v$ - Contrainte verticale totale (supposée).           | (7) $\sigma_v$ - Vertical total (assumed).        |
| (8) $\sigma_3$ - Contrainte principale totale minimale (supposée). | (8) $\sigma_3$ - Minor principal total (assumed). |
| (9) $\gamma_w h_w$ - Pression hydrostatique.                       | (9) $\gamma_w h_w$ - Hydrostatic.                 |
| (10) $u$ - Pression interstitielle tirée du réseau d'écoulement.   | (10) $u$ - Pore pressure from flow net.           |
| (11) Zone de contraintes effectives négatives.                     | (11) Zone of negative effective stress.           |



Barrage de John Martin - Distribution des pressions verticales dans le barrage (d'après Penman, 1977).

*Distribution of vertical pressure in the John Martin Dam (after Penman, 1977).*

- (1) Pression (tonne/pied carré).
- (2) Zone perméable.
- (3) Zone imperméable.
- (4) Amont.
- (5) Poids nominal des terres.
- (6) Pression mesurée.

- (1) Pressure (ton/ft<sup>2</sup>).
- (2) Pervious section.
- (3) Impervious section.
- (4) Upstream.
- (5) Nominal overburden.
- (6) Observed pressure.

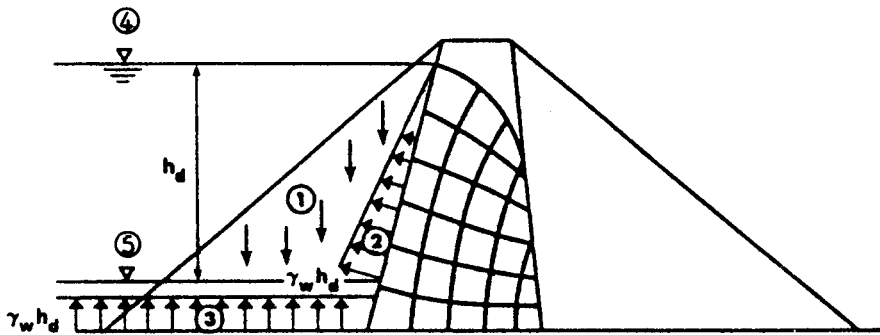


Fig. 4.13

Chargement dû à la vidange rapide.

*Loading for rapid drawdown.*

Effets :

- (1) Recharge amont — disparition de la poussée d'Archimède.
- (2) Face amont du noyau - disparition de la charge d'eau.
- (3) Fondation - réduction de la charge d'eau.
- (4) Avant vidange.
- (5) Après vidange.

Effects :

- (1) Upstream shell, removal of buoyancy.
- (2) Upstream face of core, removal of water load.
- (3) Foundation, reduction of water load.
- (4) Before drawdown.
- (5) After drawdown.



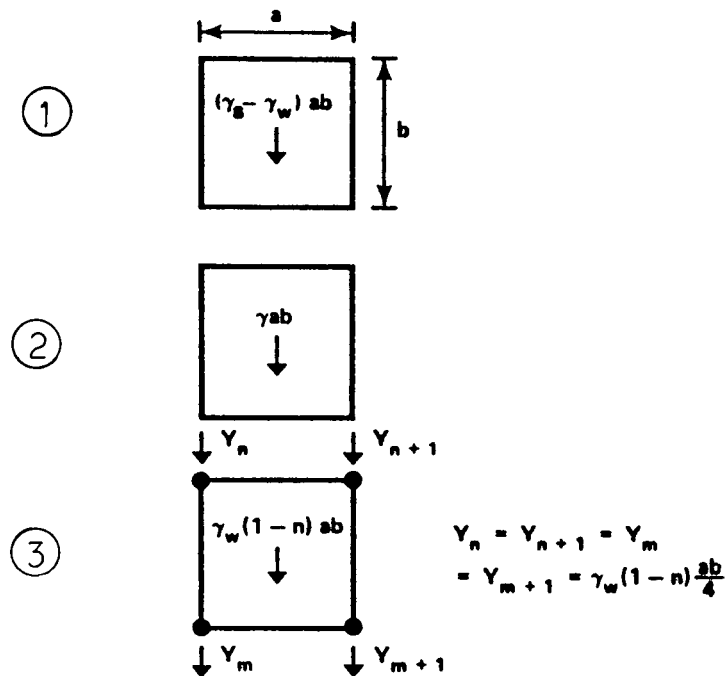
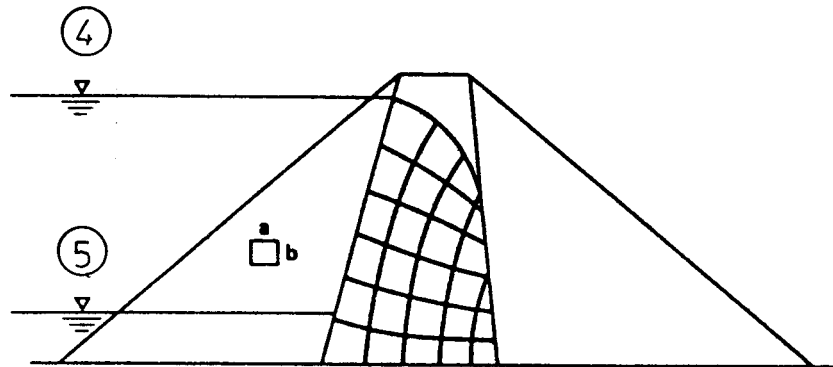


Fig. 4.14

Schéma d'introduction de l'effet de la disparition de la poussée d'Archimède dans un calcul par éléments finis.

*Scheme for introducing buoyancy removal into finite element analysis.*

En termes de forces volumiques :

- (1) Avant vidange.
- (2) Après vidange.
- (3) Différences entre les étapes 2 et 1, en forces nodales équivalentes.
- (4) Niveau avant vidange.
- (5) Niveau après vidange.

*In terms of body forces :*

- (1) Before drawdown.
- (2) After drawdown.
- (3) Difference between steps 2, and 1, in equivalent nodal forces.
- (4) Before drawdown.
- (5) After drawdown.

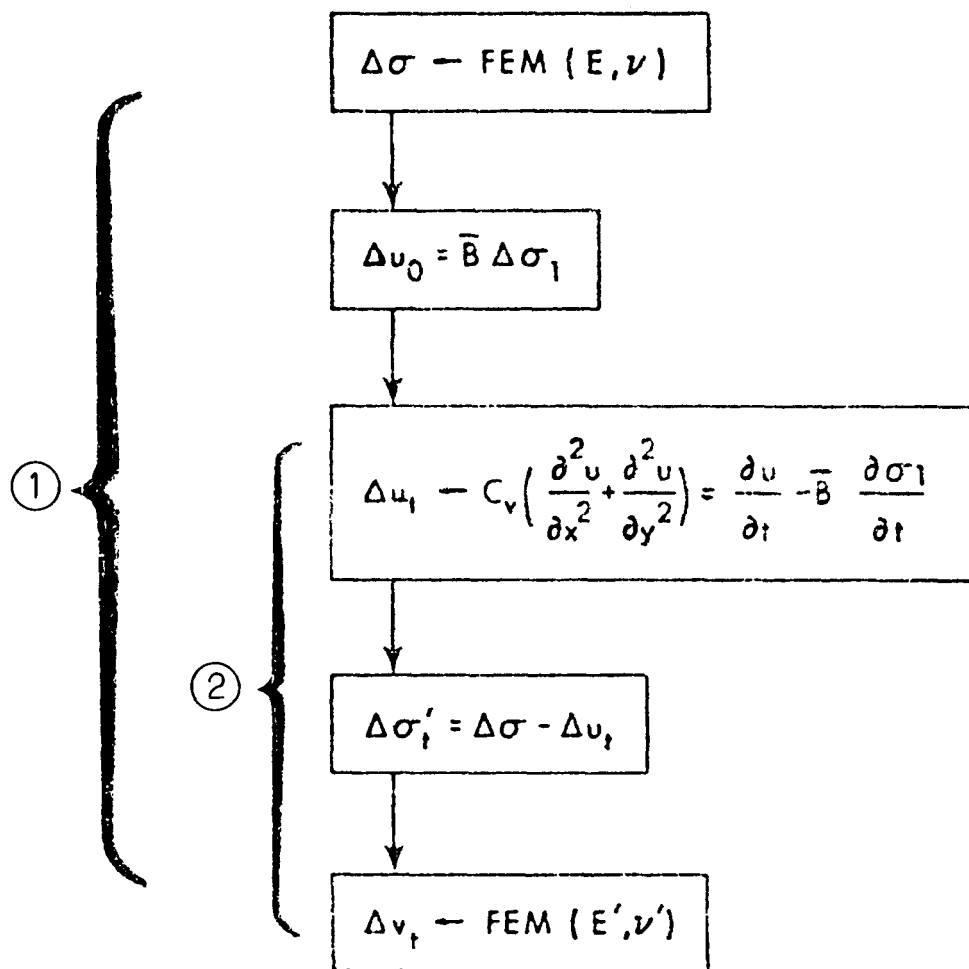


Fig. 5.1

Schéma du calcul des déformations de consolidation.  
*Scheme of analysis for consolidation deformations.*

(1) Pour chaque étape de construction.  
 (2) Pour chaque pas de temps.

(1) For every construction step.  
 (2) For every time interval.

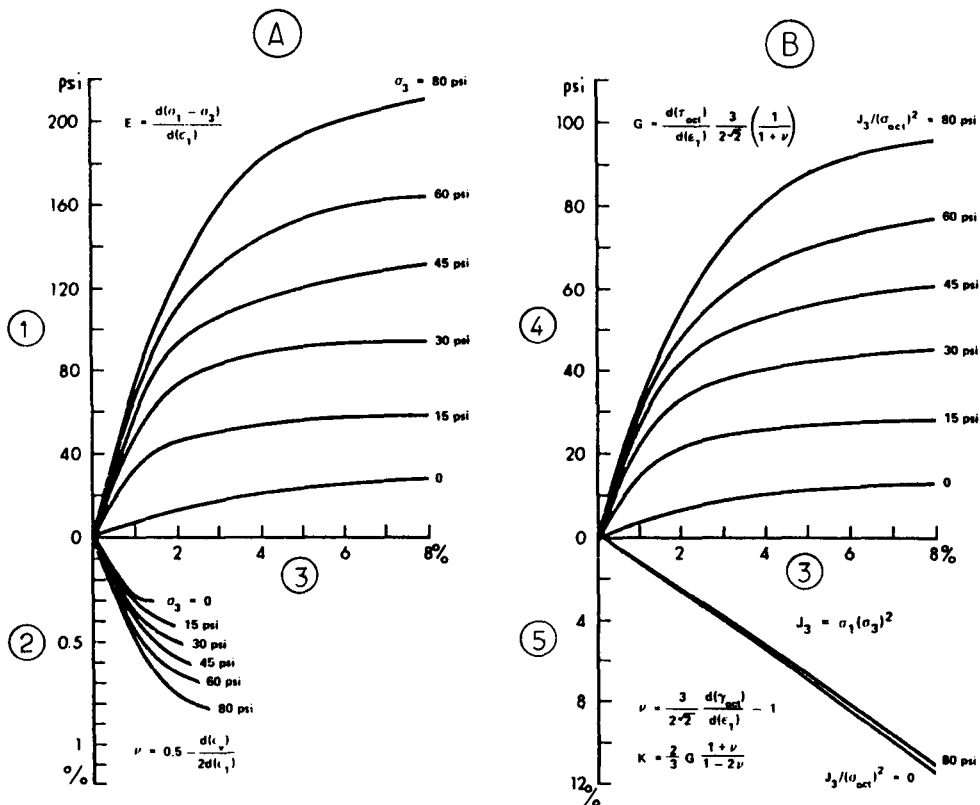


Fig. 6.1

Résultats d'essais triaxiaux pour un sable silteux -  
Expressions classique et en termes d'invariants  
(d'après Krishnaya, 1973).

*Triaxial test data for silty sand - conventional and invariant forms  
(d'après Krishnaya, 1973).*

(A) Expression classique.

- (1) Déviateur de contrainte ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) (psi).
- (2) Déformation volumétrique  $\epsilon_v$  (%).
- (3) Déformation axiale  $\epsilon_1$  (%).

(B) Expression en termes d'invariants.

- (4) Déformation axiale (%).
- (5) Contrainte de cisaillement octaédrique (psi).
- (6) Déformation de cisaillement octaédrique (%).

(A) Conventional form.

- (1) Deviation stress ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) (psi).
- (1) Volumetric strain  $\epsilon_v$  (%).
- (3) Axial strain  $\epsilon_1$  (%).

(B) Invariant form.

- (4) Axial strain (%).
- (5) Octahedral shear stress (psi).
- (6) Octahedral shear strain (%).

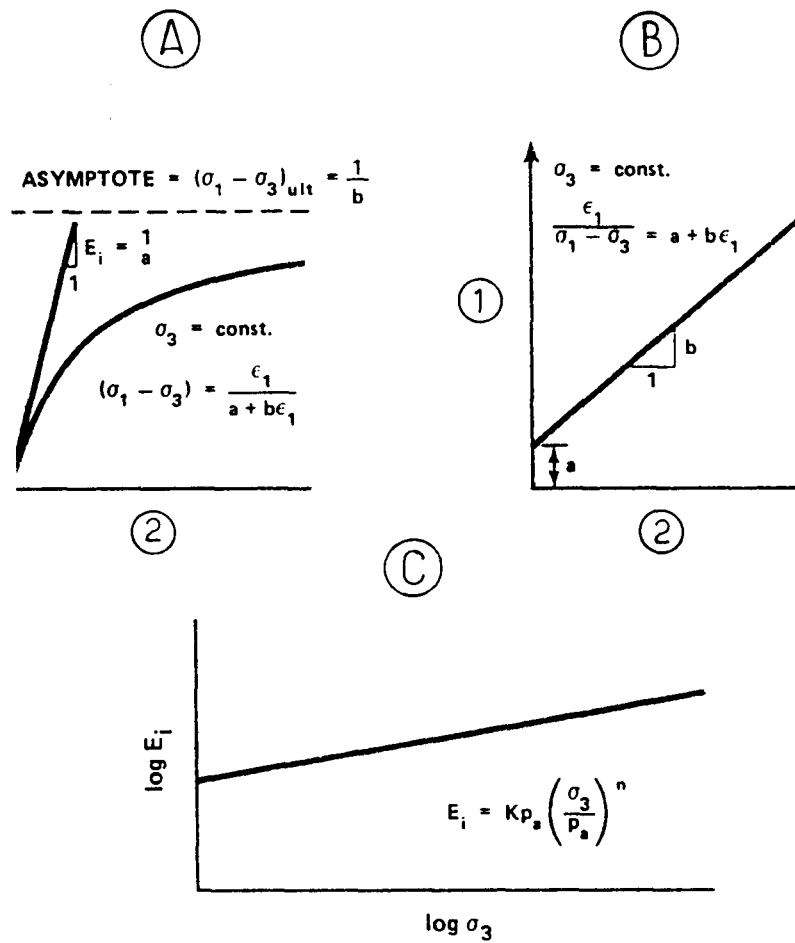


Fig. 6.2

Loi rhéologique hyperbolique  
 (d'après Kulhawy *et al*, 1969, et Ducan et Chang, 1970).

Hyperbolic variable elastic stress-strain law  
 (after Kulkawy *et al*, 1969, and Ducan and Chang, 1970).

- |   |   |
|---|---|
| (A) Courbe hyperbolique contrainte - déformation.                                 | (A) Hyperbolic stress-strain curve.                                   |
| (1) Déviateur de contrainte $(\sigma_1 - \sigma_3)$ .                             | (1) Stress difference $(\sigma_1 - \sigma_3)$ .                       |
| (2) Déformation axiale $\epsilon_1$ .   | (2) Axial strain $\epsilon_1$ .                                       |
| (B) Courbe hyperbolique transformée contrainte - déformation.                     | (B) Transformed hyperbolic stress-strain curve.                       |
| (1) Déformation axiale/déviateur de contrainte : $\epsilon/\sigma_1 - \sigma_3$ . | (1) Axial strain/stress difference : $\epsilon/\sigma_1 - \sigma_3$ . |
| (2) Déformation axiale $\epsilon_1$ .   | (2) Axial strain $\epsilon_1$ .                                       |
| (C) Variation du module initial en fonction des contraintes.                      | (C) Stress dependency of initial modulus.                             |

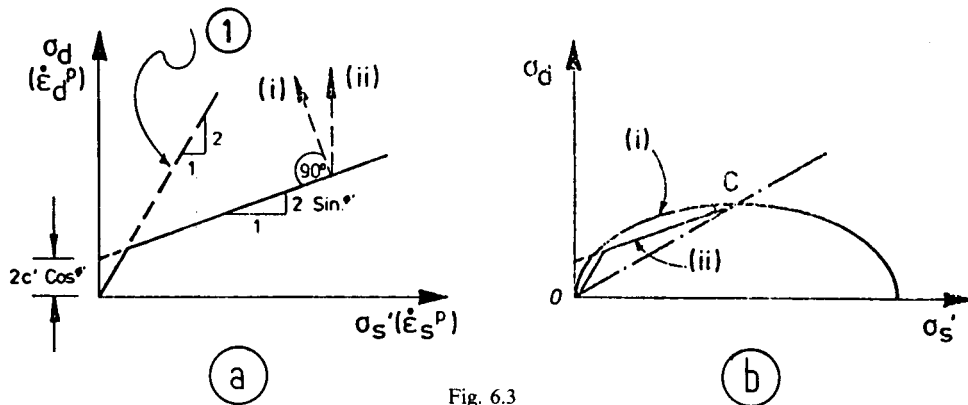


Fig. 6.3

Seuils pour deux modèles élasto-plastiques.  
Yield surfaces for two elastic-plastic models.

(a) Mohr-Coulomb.

Loi d'écoulement :

- (i) Associative.
- (ii) Non associative.

(1) Coupure « no tension ».

(b) Modèle d'état critique.

- (i) Version ellipse continue.
- (ii) Version Mohr-Coulomb.

(a) Mohr-Colomb.

Flow rule :

- (i) Associative.
- (ii) Non associative.

(1) No tension cut-off.

(b) Critical state model.

- (i) Continued ellipse version.
- (ii) Mohr-Coulomb version.

$$\sigma'_s = 1/2 (\sigma'_1 + \sigma'_2)$$

$$\sigma'_d = |\sigma'_1 - \sigma'_2|$$

$\dot{\epsilon}_s^p, \dot{\epsilon}_d^p$  taux de déformation plastique correspondants  
corresponding plastic strain rates (or increments)

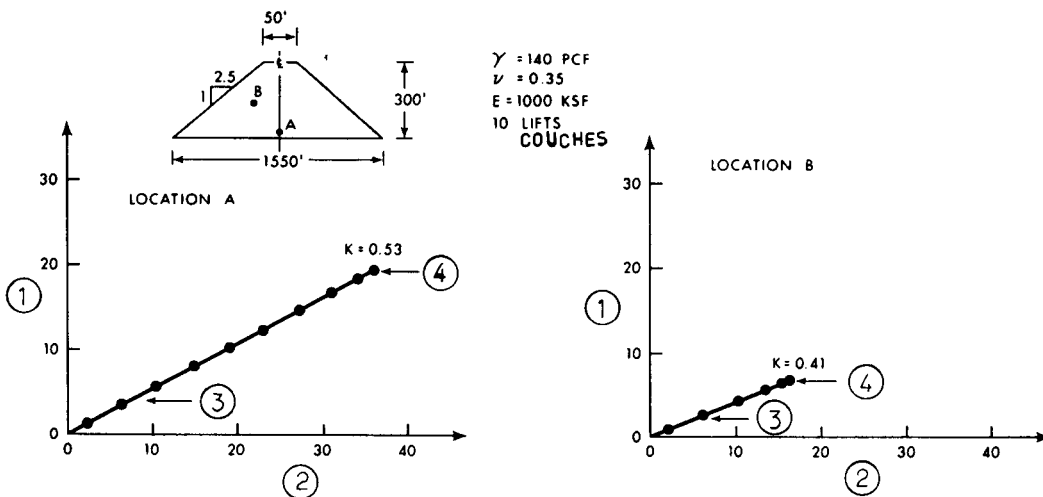


Fig. 6.4

Chemins de contrainte calculés pour la construction  
(d'après Eisenstein et Law, 1979).

Computed construction stress paths  
(after Eisenstein and Law 1979).

(1) Contrainte principale mineure  $\sigma_3$  (KSF).

(2) Contrainte principale majeure  $\sigma_1$  (KSF).

(3) 2<sup>e</sup> couche.

(4) Dernière couche (hauteur totale du barrage).

(1)  $\sigma_3$ , minor principal stress (KSF).

(2)  $\sigma_1$ , major principal stress (KSF).

(3) 2nd lift.

(4) Last lift (full height dam).

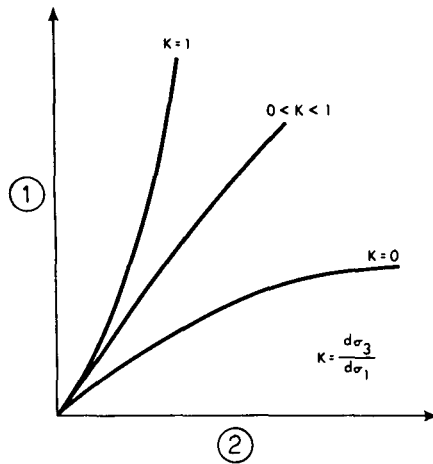


Fig. 6.5

Courbes contrainte axiale - déformation axiale pour différents rapports de contraintes principales (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Axial stress-strain curves for different principal stress ratios (after Eisenstein and Law, 1979).*

- (1) Contrainte axiale  $\sigma_1$ .
- (2) Déformation axiale  $\epsilon_1$ .

- (1) Axial stress  $\sigma_1$ .
- (2) Axial strain  $\epsilon_1$ .

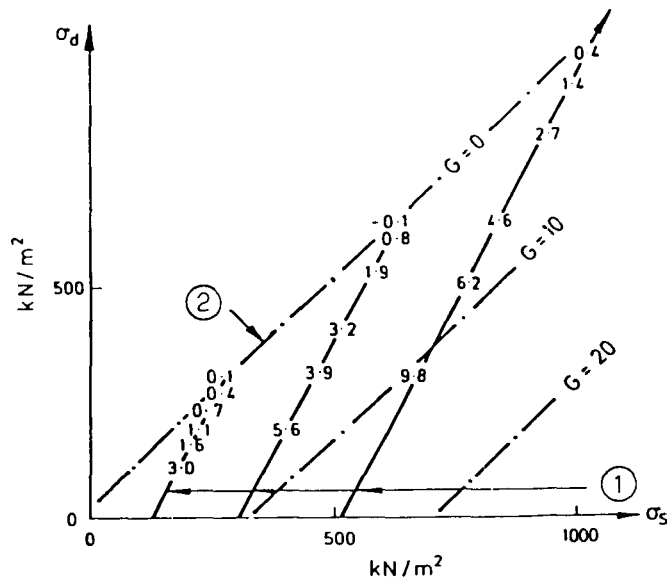


Fig. 6.6

Module de cisaillement d'un matériau grossier argileux, déterminé d'après des essais triaxiaux (d'après Naylor *et al.*, 1981)

*Boulder clay shear modulus from triaxial tests (after Naylor *et al.*, 1981)*

- Les lignes correspondent à la surface la plus adaptée  $G = 0,5 + 27 \sigma_s - 27 \sigma_d$  MN/m<sup>2</sup>.
- Les valeurs de G sont en MN/m<sup>2</sup>.
- (1) Chemin de contrainte effective.
- (2) Rupture.

- Contours are of best fit surface  $G = 0.5 + 27 \sigma_s - 27 \sigma_d$  MN/m<sup>2</sup>.
- Spot values are G in MN/m<sup>2</sup>.
- (1) Effective stress paths.
- (2) Failure.

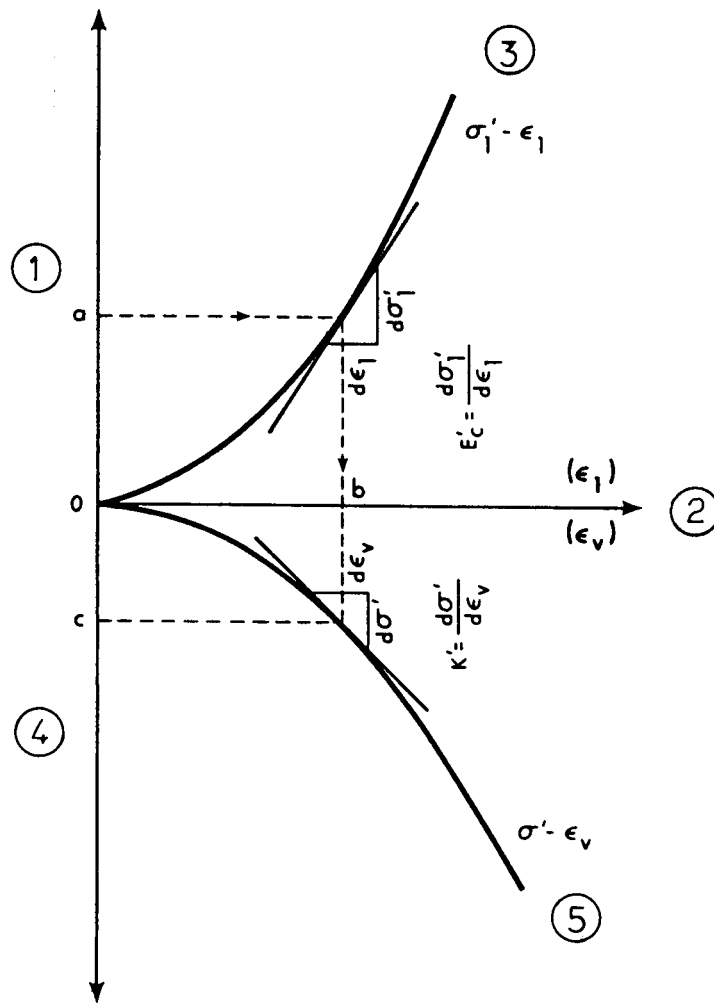


Fig. 6.7

Détermination des modules élastiques à partir d'essais œdométriques et d'essais de consolidation isotrope (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Elastic moduli derivation from œdometer and isotropic consolidation tests (after Eisenstein and Law, 1979).*

- |   |  |
|---|--|
| (1) Contrainte principale majeure effective $\sigma'_1$ .             | (1) Effective major principal stress $\sigma'_1$ . |
| (2) Déformation $3 \epsilon_{net}$ .                                  | (2) Strain, $3 \epsilon_{net}$ .                   |
| (3) Courbe contrainte - déformation pour une compression œdométrique. | (3) œdometer compression stress-strain curve.      |
| (4) Contrainte effective isotrope $\sigma'$ .                         | (4) Effective isotropic stress $\sigma'$ .         |
| (5) Courbe contrainte - déformation pour une compression isotrope.    | (5) Isotropic compression stress-strain curve.     |

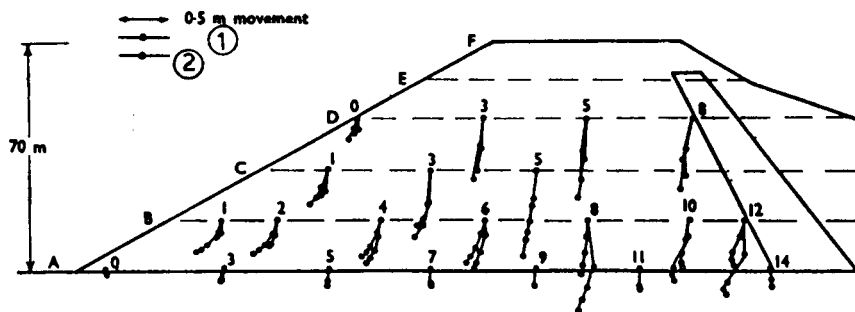


Fig. 6.8

Barrage de Scammonden - Comparaison des déplacements mesurés et calculés d'après Penman *et al.*, 1971).

*Comparison of observed and predicted movement, Scammonden Dam (after Penman et al., 1971).*

- (1) Déplacement mesuré.
- (2) Déplacement calculé.

- (1) Observed movement.
- (2) Predicted movement.

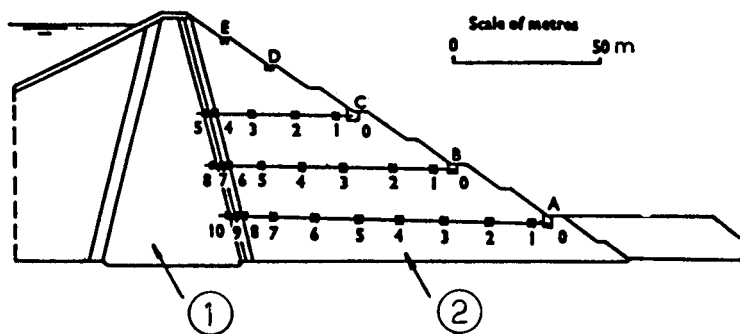


Fig. 6.9

Barrage de Llyn Brianne - Profil en travers montrant les points de mesure des tassements (d'après Cathie et Dungar, 1978).

*Section through Llyn Brianne Dam showing settlement points (after Cathie and Dungar, 1978).*

- (1) Noyau en argile.
- (2) Enrochement.

- (1) Clay core.
- (2) Rockfill.



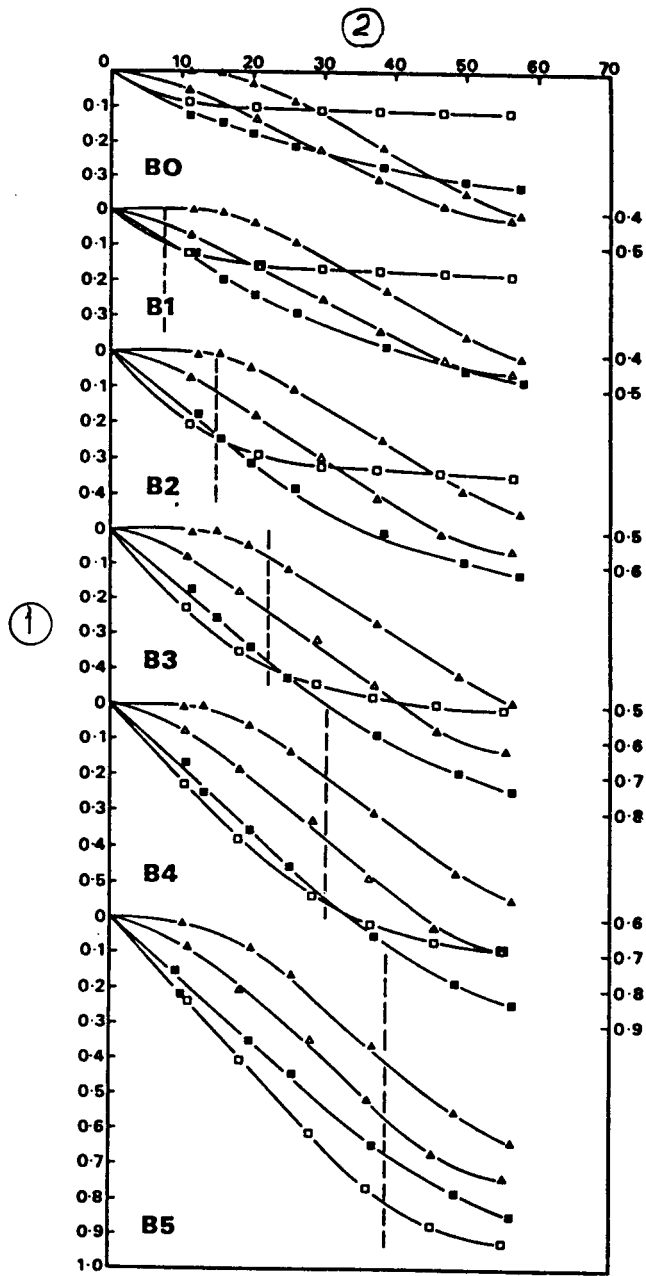


Fig. 6.10

Barrage de Llyn Brianne - Comparaison des déplacements mesurés et calculés  
(voir Fig. 6.15 pour un emplacement des points de mesures)  
(d'après Penman et Charles, 1973).

*Comparison of observed and predicted movements  
Llyn Brianne Dam (for location see Fig. 6.15)  
(after Penman and Charles, 1973).*

(1) Déplacement de la plaque (mètres).

(1) Displacement of plate (meters).

(2) Hauteur du remblai au dessus de la plaque (mètres).

(2) Height of fill above plate (meters).

▲ Déplacement vers l'aval mesuré.

▲ Observed downstream movement.

△ Déplacement vers l'aval calculé.

△ Predicted downstream movement.

■ Tassement mesuré.

■ Observed settlement.

□ Tassement calculé.

□ Predicted settlement.

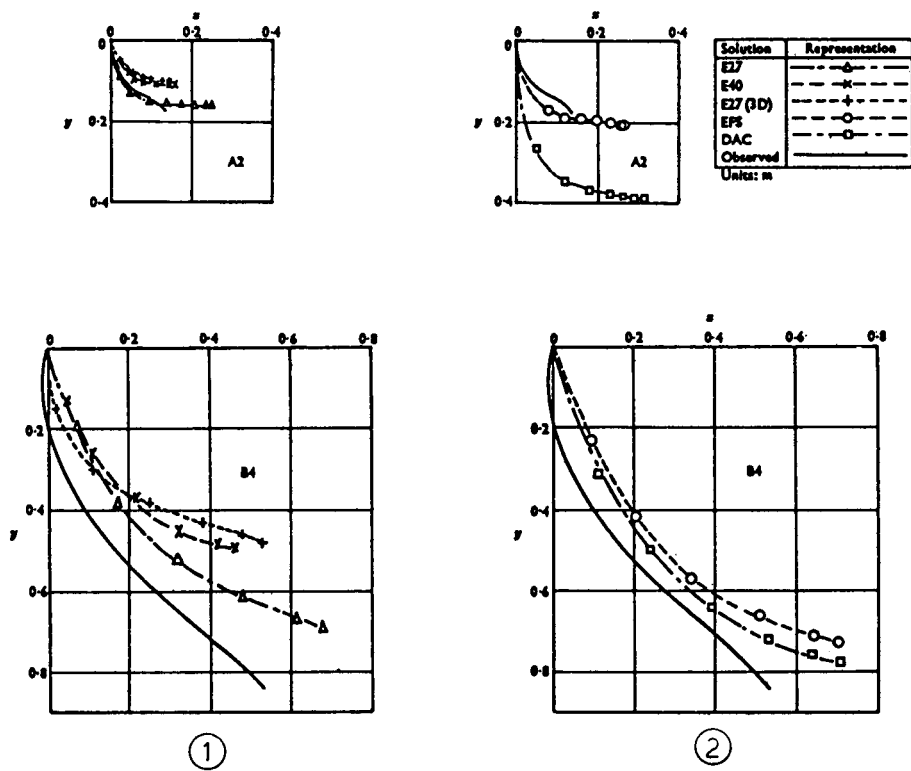


Fig. 6.11

Barrage de Llyn Brianne - Déplacements mesurés et calculés  
 (d'après différents calculs)  
 (d'après Cathie et Dungar, 1978).  
*Observed and predicted movements from different  
 analyses, Llyn Brianne dam  
 (after Cathie and Dungar, 1978).*

- (1) Calculs élastiques.
- (2) Calculs élastiques non-linéaires.

- (1) Elastic analyses.
- (2) Non-linear elastic analyses.

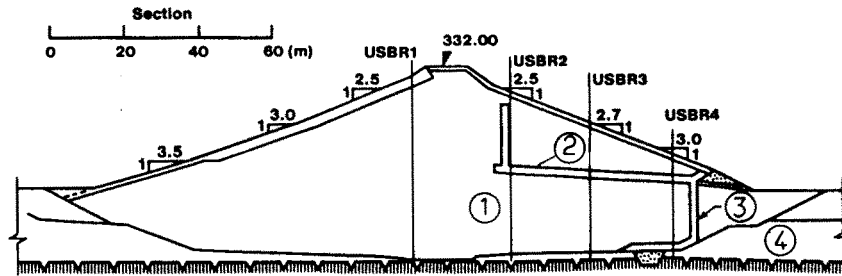


Fig. 6.12

Barrage de Ilha Solteira - Profil en travers  
(d'après Celestino et Marechal, 1975).

*Ilha Solteira Dam, cross-section  
(after Celestino and Marechal, 1975).*

- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| (1) Remblai compacté.      | (1) Compacted fill.           |
| (2) Drain en sable.        | (2) Sand drain.               |
| (3) Sable.                 | (3) Sand.                     |
| (4) Alluvions, colluvions. | (4) Alluvial, colluvial soil. |

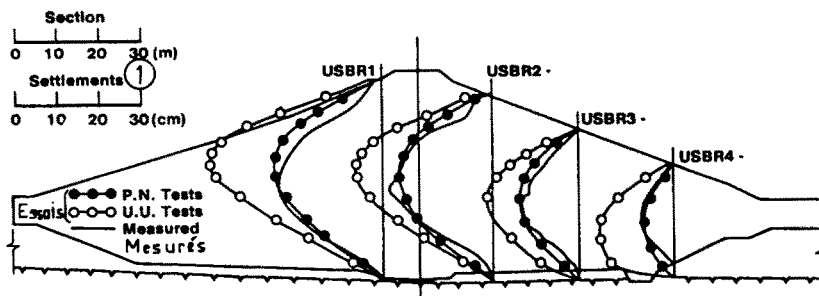


Fig. 6.13

Barrage de Ilha Solteira - Tassements calculés et mesurés  
(d'après Celestino et Marechal, 1975).

*Ilha Solteira Dam, calculated and measured settlements  
(after Celestino and Marechal, 1975).*

- |  |  |
|--|--|
| USBR 1 : Tassements pour le remblai construit jusqu'à la cote 329,5. | USBR 1 : Settlements for embankment height at level 329.5. |
| USBR 2 : Tassements pour le remblai construit jusqu'à la cote 321.   | USBR 2 : Settlements for embankment height at level 321.   |
| USBR 3 : Tassements pour le remblai construit jusqu'à la cote 317.   | USBR 3 : Settlements for embankment height at level 317.   |
| USBR 4 : Tassements pour le remblai construit jusqu'à la cote 308,5. | USBR 4 : Settlements for embankment height at level 308.5. |
| (1) Tassements.  | (1) Settlements.   |

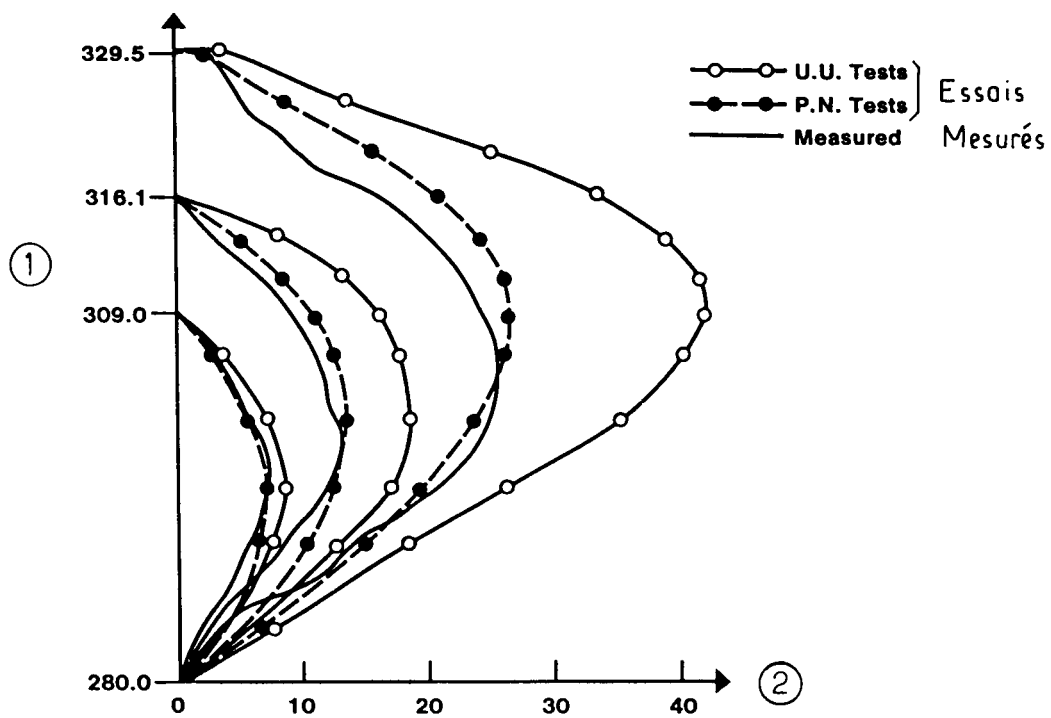


Fig. 6.14

Barrage de Ilha Solteira - Tassements calculés et mesurés  
pour l'appareil USBR 1 (voir Fig. 6.9)  
(d'après Celestino et Marechal, 1975).

*Ilha Solteira Dam, calculated and measured settlements for USBR 1 (see Fig. 6.9)  
(after Celestino and Marechal, 1975).*

(1) Cote du remblai (m).  
(2) Tassements (cm).

(1) Embankment elevation (m).  
(2) Settlements (cm).

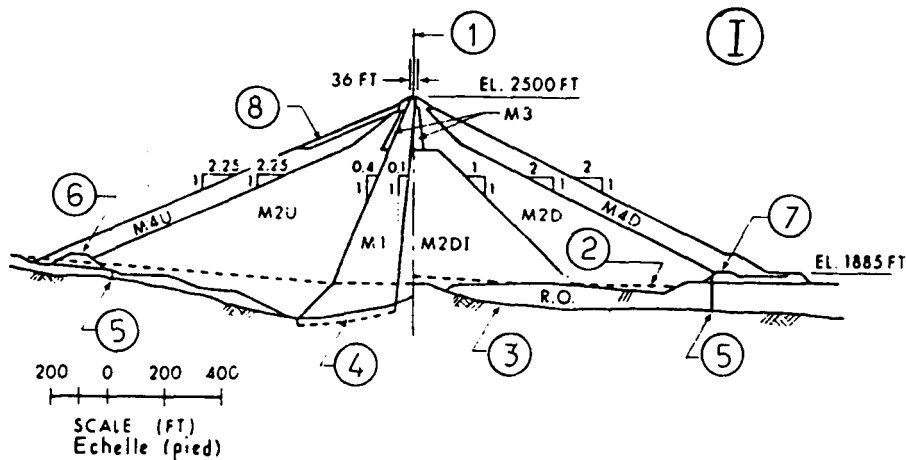


Fig. 6.15

Barrage de Mica - Profil en travers principal et vue en plan.  
Main transverse section and plan of Mica Dam.

I. Profil en travers principal.

I. Main section.

- |                                   |                        |
|-----------------------------------|------------------------|
| (1) Axe du barrage.               | (1) Dam axis.          |
| (2) Lit de rivière.               | (2) Original riverbed. |
| (3) Bedrock.                      | (3) Bedrock.           |
| (4) Tapis d'injection.            | (4) Blanket grouting.  |
| (5) Puits.                        | (5) Tube well.         |
| (6) Batardeau amont.              | (6) Upstream c'dam.    |
| (7) Batardeau aval.               | (7) Downstream c'dam.  |
| (8) Zone de baisse du plan d'eau. | (8) Drawdown zone.     |

Zone	Description	Zone	Description
M 1	Noyau en moraine argileuse (couches de 25 cm).	M 1	Core, glacial till in 25cm (10") layers.
M 2	Recharge principale, en sable et gravier (couches de 30 cm passant à 45 cm pendant la construction).	M 2	Main shell, sand and gravel in 30 cm (12") layers, changed during construction to 45 cm (18") layers.
M 2 D 1	Zone interne en matériaux M 2 de faible qualité.	M 2 D 1	Inner zone of poorer M 2 materials.
M 3	Zone support du noyau, en sable et gravier ou enrochement (couches de 15 cm).	M 3	Core support zone, sand and gravel or rock in 15 cm (6") layers.
M 4	Recharge externe en sable et gravier ou enrochement (couches de 60 cm).	M 4	Outer shell, sand and gravel or rock in 60 cm (24") layers.
Zone de baisse	Gravier, cailloux, blocs ou enrochement (couches de 60 cm).	Drawdown zone	Gravel, cobbles and boulders or rock in 60 cm (24") layers.
R. O.	Terrain de couverture en place.	R. O.	Original River Overburden.

II. Vue en plan.

II. Plan view.

- |  |  |
|--|--|
| (1) Crête du barrage cote 2 500 pied (1972).                     | (1) Dam crest el. 2 500 ft (1972).                         |
| (2) Axe du barrage (rayon 10 000 pieds).                         | (2) Dam axis 10 000 ft R.                                  |
| (3) Stations le long de la corde.                                | (3) Stations along long chord.                             |
| (4) Niveau d'eau aval (cote 1 880 pieds).                        | (4) Tailwater el. 1 880 ft.                                |
| MV 8 Sonde n° 8 de mesure des mouvements verticaux (ou presque). | MV 8 Vertical (or near-vertical) movement gauge no. 8 etc. |
| (1969) Profil à la fin de la période de construction 1969, etc.  | (1969) Profile at end of 1969 construction season, etc.    |
| A-A Coupe centrale longitudinale.                                | A-A Longitudinal central section.                          |
| B-B Coupe transversale principale « déformation plane ».         | B-B Main transverse "plane strain" section.                |

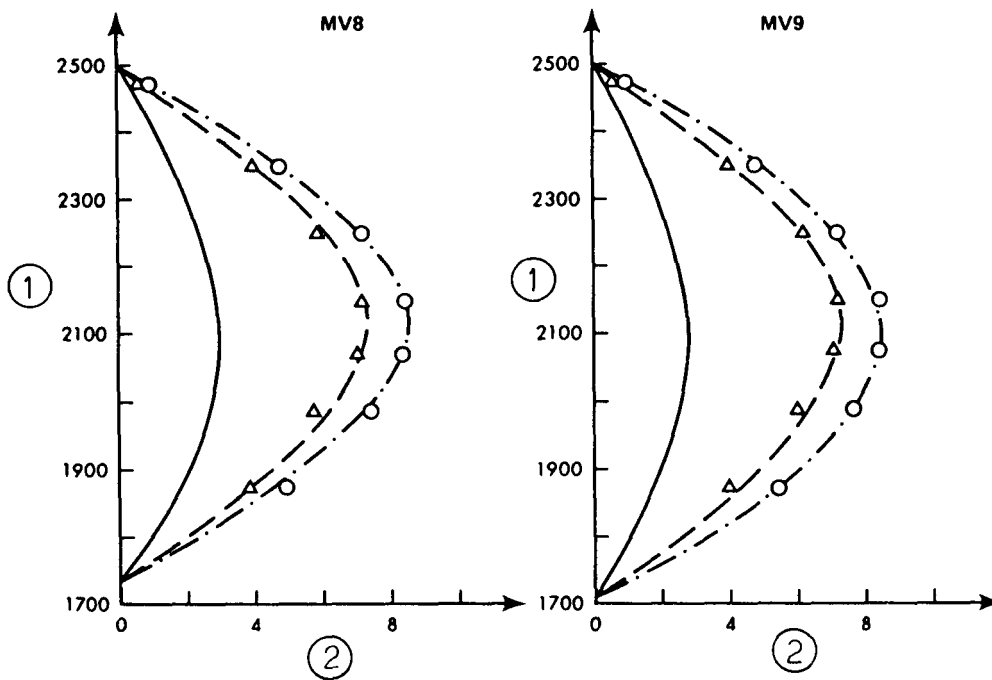


Fig. 6.16

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés avec les tassements calculés en adoptant les paramètres déduits des essais triaxiaux (points MV 8 et MV 9) (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. triaxial test based settlements for Mica Dam points MV 8 and MV 9 (after Eisenstein and Law, 1979).*

(1) Cote (pieds).

(2) Tassements (pieds).

— Tassements mesurés (à l'exclusion de ceux du bedrock).

--- Tassements calculés avec des relations hyperboliques contrainte-déformation.

-·-·- Tassements calculés avec des relations contrainte-déformation en termes d'invariants.

(1) Elevation (feet).

(2) Settlement (feet).

— Observed settlements (excluding bedrock settlements).

--- Calculated with hyperbolic stress-strain relationships.

-·-·- Calculated with invariant stress-strain relationships.

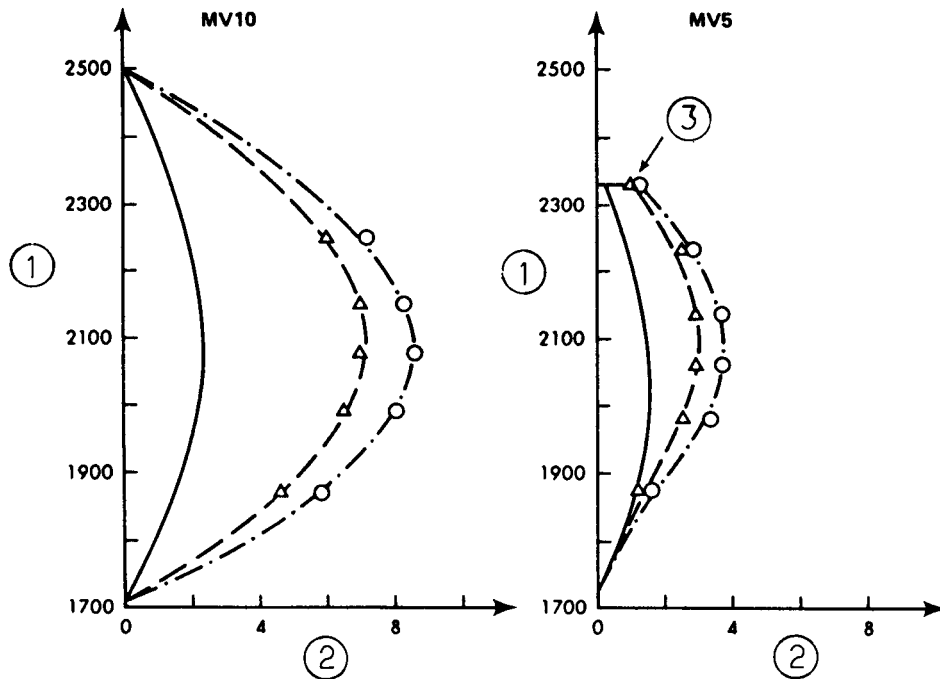


Fig. 6.17

Barrage de Mica-Comparaison des tassements mesurés avec les tassements calculés en adoptant les paramètres déduits des essais triaxiaux (points MV 10 et MV 5) (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. triaxial test based settlements for Mica Dam points MV 10 and MV 5 (after Eisenstein and Law, 1979).*

(1) Cote (pieds).

(2) Tassement (pieds).

— Tassements mesurés (à l'exclusion de ceux du bedrock).

--- Tassements calculés avec des relations hyperboliques contrainte-déformation.

-·-·- Tassements calculés avec des relations contrainte-déformation en termes d'invariants.

(3) Sommet de l'appareil de mesure.

(1) Elevation (feet).

(2) Settlement (feet).

— Observed settlements (excluding bedrock settlements).

--- Calculated with hyperbolic stress-strain relationships.

-·-·- Calculated with invariant stress-strain relationships.

(3) Top of gauge.

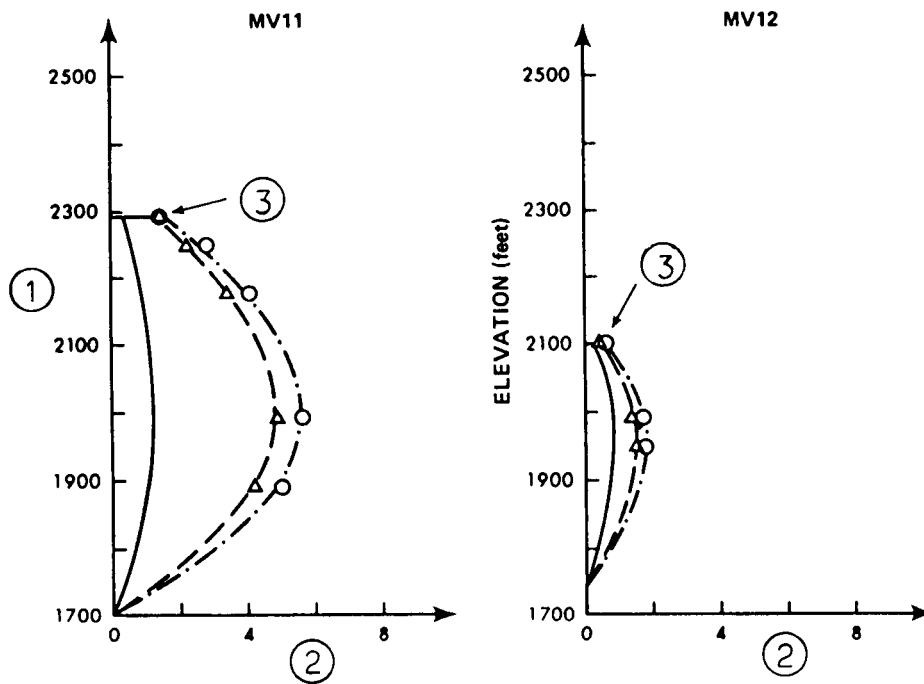


Fig. 6.18

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés avec les tassements calculés en adoptant les paramètres déduits des essais triaxiaux (points MV 11 et MV 12) (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. triaxial test based settlements for Mica Dam points MV 11 and MV 12 (after Eisenstein and Law, 1979).*

- (1) Cote (pieds).
- (2) Tassement (pieds).
- Tassements mesurés (à l'exclusion de ceux du bedrock).
- Tassements calculés avec des relations hyperboliques contrainte-déformation.
- Tassements calculés avec des relations contrainte-déformation en termes d'invariants.
- (3) Sommet de l'appareil de mesure.

- (1) Elevation (feet).
- (2) Settlement (feet).
- Observed settlements (excluding bedrock settlements).
- Calculated with hyperbolic stress-strain relationships.
- Calculated with invariant stress-strain relationships.
- (3) Top of gauge.



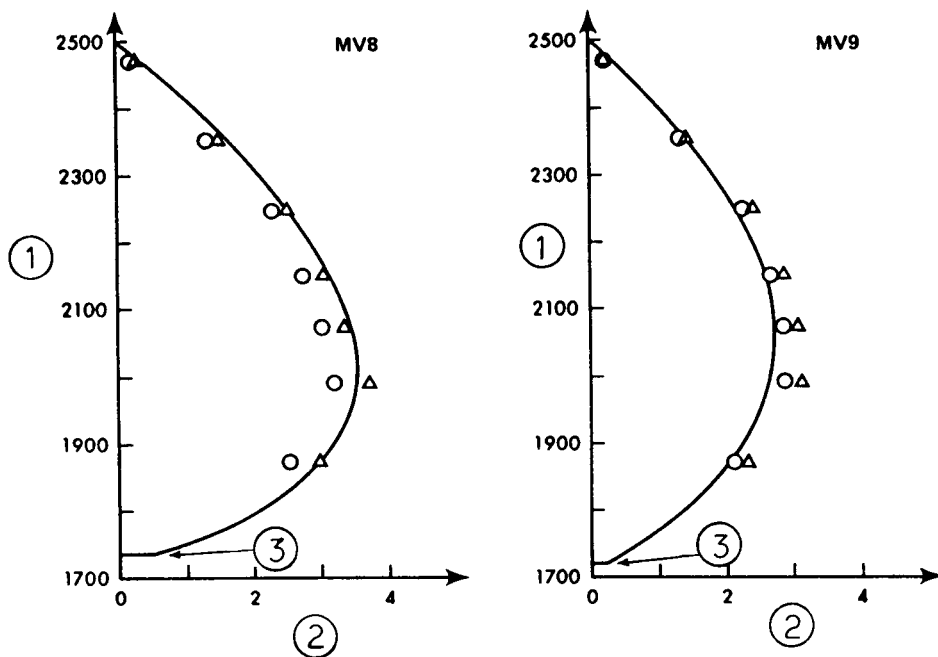


Fig. 6.19

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés  
avec les tassements calculés en non-drainé et consolidation  
(points MV 8 et MV 9)  
(d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. computed settlements for undrained  
and consolidation analysis for Mica Dam, points MV 8 and MV 9  
(after Eisenstein and Law, 1979).*

MV 8 : au centre du noyau.

MV 9 : dans le noyau, près du contact avec la recharge.

(1) Cote (pieds).

(2) Tassement total (pieds).

○ Calcul en contraintes totales, incluant les tassements du bedrock.

△ Calcul en contraintes effectives, incluant les tassements du bedrock.

— Tassements mesurés à la fin de la construction.

(3) Niveau inférieur de l'appareil de mesure.

MV 8 : Center of the core.

MV 9 : In core close to core/shell interface.

(1) Elevation (feet).

(2) Total settlement (feet).

○ Total stress analysis including bedrock settlements.

△ Effective stress analysis including bedrock settlements.

— Observed values at the end of construction.

(3) Bottom of gauge.

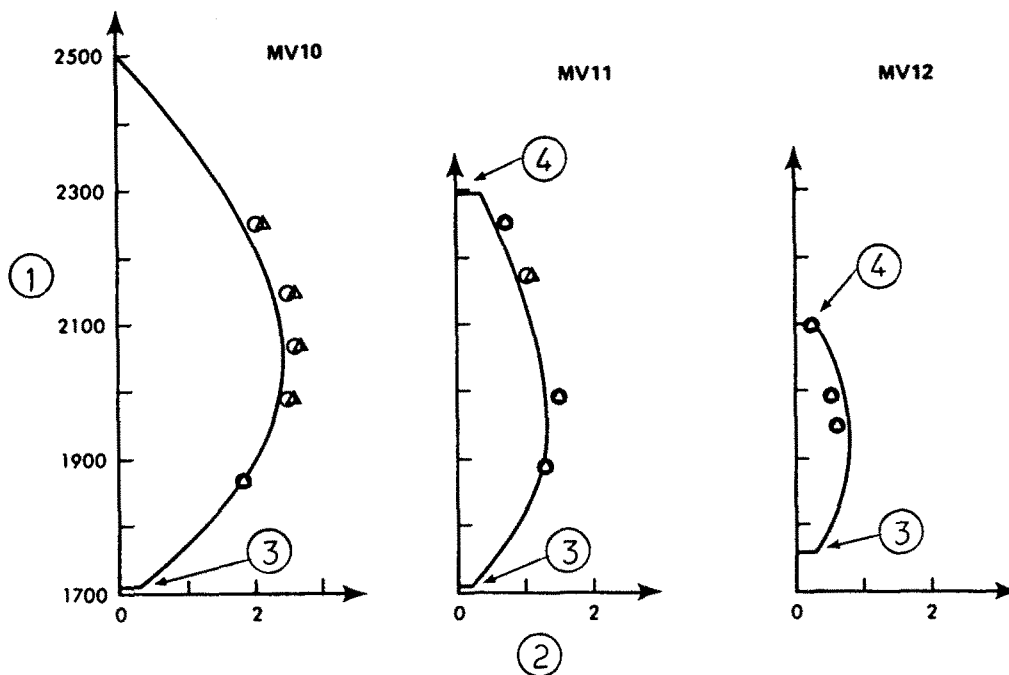


Fig. 6.20

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés avec les tassements calculés en non-drainé et consolidation (points MV 10, MV 11, MV 12) (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. computed settlements for undrained and consolidation analysis for Mica Dam, points MV 10, MV 11, MV 12 (after Eisenstein and Law, 1979).*

MV 10 : Dans la recharge, près du contact avec le noyau - Section 22 + 50.

MV 11 : Recharge - Section 22 + 50.

MV 12 : Recharge - Section 22 + 50.

(1) Cote (pieds).

(2) Tassement total (pieds).

○ Calcul en contraintes totales, incluant les tassements du bedrock.

△ Calcul en contraintes effectives, incluant les tassements du bedrock.

— Tassements mesurés à la fin de la construction.

(3) Niveau inférieur de l'appareil de mesure.

(4) Sommet de l'appareil de mesure.

MV 10 : In shell close to core/shell interface - Section 22 + 50.

MV 11 : Shell - Section 22 + 50.

MV 12 : Shell - Section 22 + 50.

(1) Elevation (feet).

(2) Total settlement (feet).

○ Total stress analysis including bedrock settlements.

△ Effective stress analysis including bedrock settlements.

— Observed values at the end of construction.

(3) Bottom of gauge.

(4) Top of gauge.

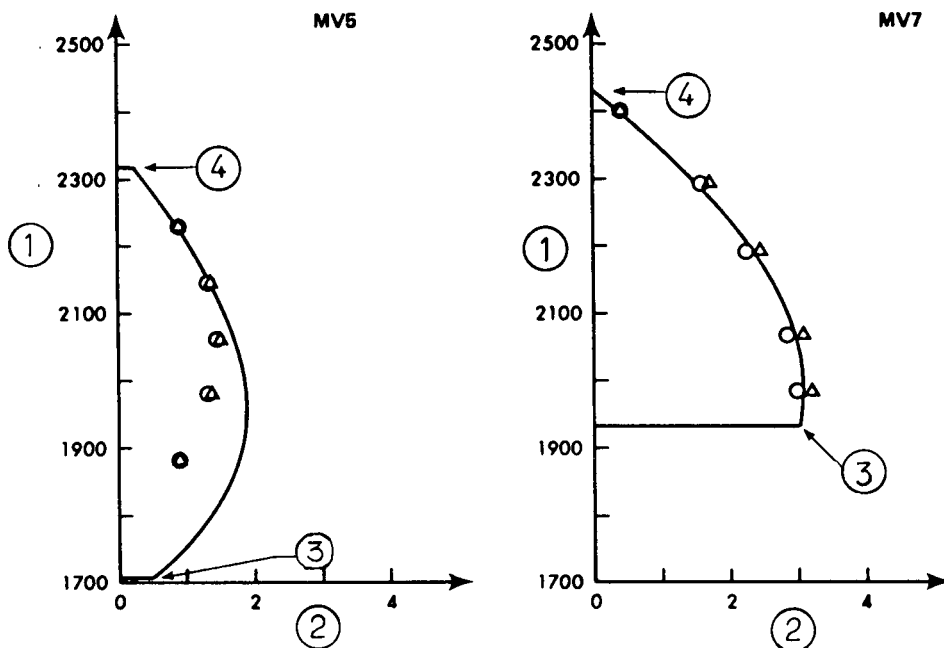


Fig. 6.21

Barrage de Mica - Comparaison des tassements mesurés avec les tassements calculés en non-drainé et consolidation (points MV 5 et MV 7) (d'après Eisenstein et Law, 1979).

*Observed v. computed settlements for undrained and consolidation analysis for Mica Dam, points MV 5 and MV 7 (after Eisenstein and Law, 1979).*

MV 5 : Projeté à partir de la section 25 + 50.

MV 7 : Partie supérieure dans la recharge, partie inférieure dans le noyau - Section 22 + 50.

(1) Cote (pieds).

(2) Tassement total (pieds).

○ Calcul en contraintes totales, incluant les tassements du bedrock.

△ Calcul en contraintes effectives, incluant les tassements du bedrock.

— Tassements mesurés à la fin de la construction.

(3) Niveau inférieur de l'appareil de mesure.

(4) Sommet de l'appareil de mesure.

MV 5 : Projected from section 25 + 50.

MV 7 : Upper part in shell lower part in core - Section 22 + 50.

(1) Elevation (feet).

(2) Total settlement (feet).

○ Total stress analysis including bedrock settlements.

△ Effective stress analysis including bedrock settlements.

— Observed values at the end of construction.

(3) Bottom of gauge.

(4) Top of gauge.

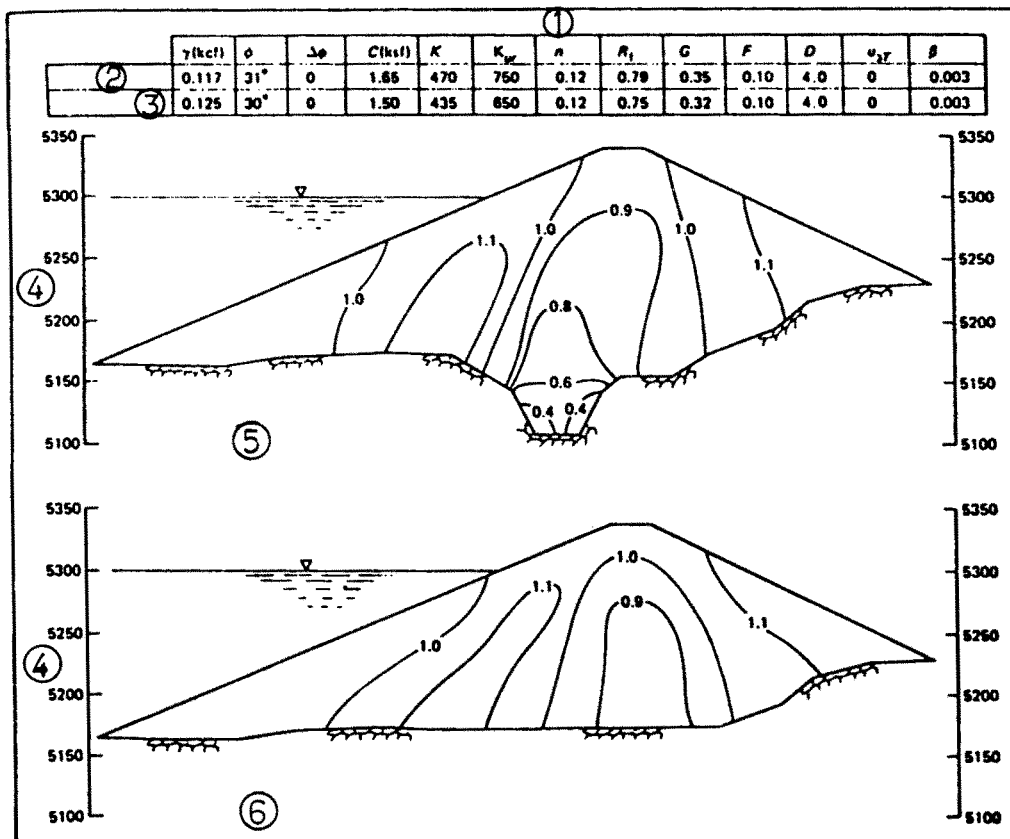


Fig. 6.22

Barrage de Teton - Isovaleurs calculées  
du rapport de la contrainte verticale au poids des terres,  
sur un profil en travers  
(d'après Penman, 1977).

*Computed distribution of vertical stress  
to overburden ratio on section through Teton Dam  
(after Penman, 1977).*

- (1) Caractéristiques des terres.
- (2) Avant saturation.
- (3) Après saturation.
- (4) Cote (pieds).
- (5) Coupe avec tranchée parafouille.
- (6) Coupe sans tranchée parafouille.

- (1) Soil properties.
- (2) Before wetting.
- (3) After wetting.
- (4) Elevation (feet).
- (5) Section with key trench.
- (6) Section with no key trench.

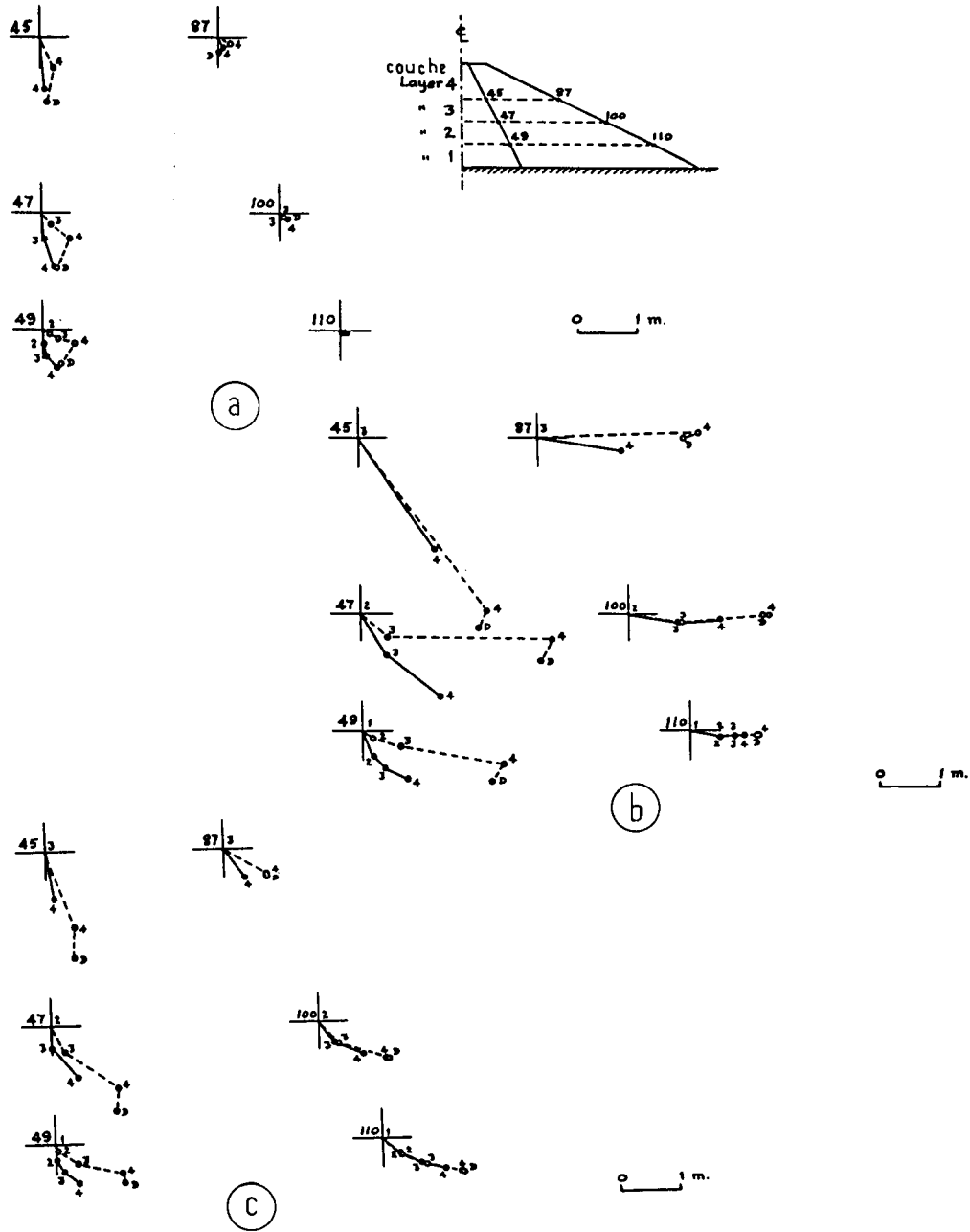


Fig. 6.23

Vecteurs déplacements pour différents modèles rhéologiques :  
 construction du remblai et dissipation des pressions interstitielles  
 (d'après Naylor, 1975).

*Movement vectors for different models for fill construction and pore pressure dissipation  
 (after Naylor, 1975).*

(a) Élastique linéaire.

(b) Modèle « K-G ».

(c) Modèle d'état critique.

--- Construction en non-drainé, suivie par un drainage.

— Parfaitement drainé.

(a) Linear elastic.

(b) « K-G » model.

(c) Critical state model.

--- Undrained construction followed by drainage (4 D).

— Fully drained.

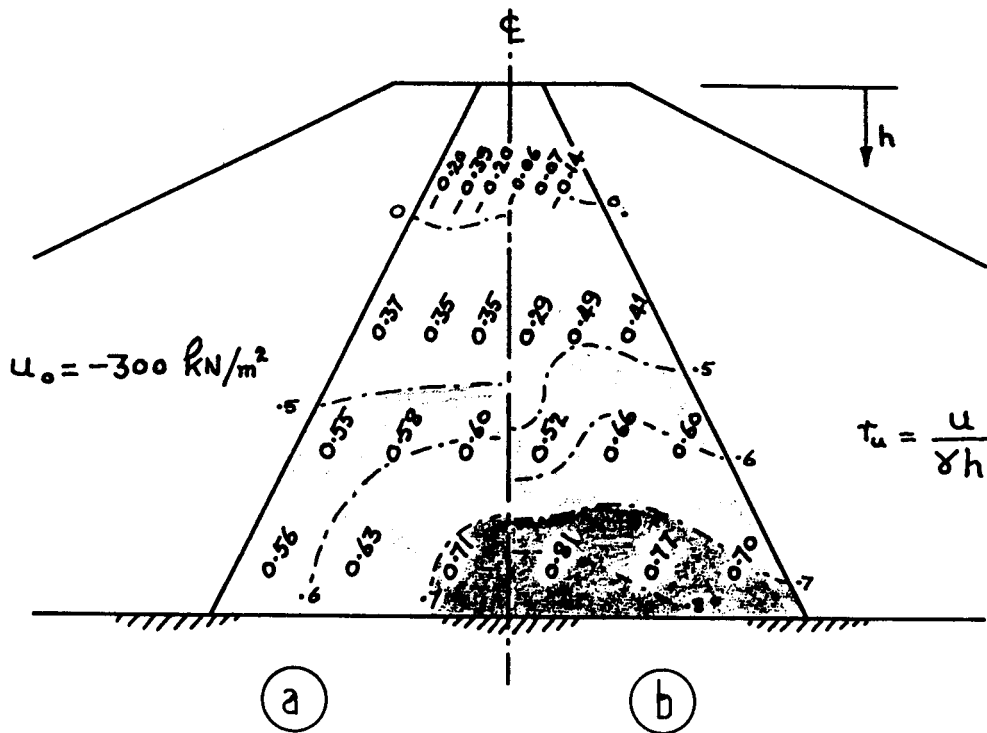


Fig. 6.24

Isovaleurs du rapport de surpression interstitielle  
 en fin de construction non-drainée  
 (d'après Naylor, 1975).

*Excess pore pressure ratio distribution at end of undrained construction  
 (after Naylor, 1975).*

(a) Modèle K-G.  
 (b) Modèle d'état critique.

(a) K-G model.  
 (b) Critical state model.

**Copyright © ICOLD - CIGB**

*Archives informatisées en ligne*  *Computerized Archives on line*

*The General Secretary / Le Secrétaire Général :  
André Bergeret - 2004*



---

**International Commission on Large Dams  
Commission Internationale des Grands Barrages  
151 Bd Haussmann -PARIS -75008**  
*<http://www.icold-cigb.net> ; <http://www.icold-cigb.org>*