

***FINITE ELEMENT METHODS
IN ANALYSIS AND DESIGN
OF DAMS***

**CALCUL ET CONCEPTION
DES BARRAGES
PAR LES MÉTHODES
DES ÉLÉMENTS FINIS**



Janvier 1987

BULLETIN 30 a

This paper was prepared by
R. W. CLOUGH and O. C. ZIENKIEWICZ, on behalf of the Committee on Analysis and
Design of Dams and published in 1978 as Bulletin 38.

The French translation was done by M. LEROY.

A Foreword and a list of References have been added to the 1987 edition
(Bulletin 38 a - January 1987)

*Ce rapport a été préparé par
R. W. CLOUGH et O. C. ZIENKIEWICZ, au nom du Comité des Calculs et la
Conception des Barrages, et publié en 1978 comme Bulletin 38.*

La traduction française a été faite par M. LEROY.

*Un Avant-Propos et une liste de Références ont été ajoutés à l'édition de 1987
(Bulletin 38 a - janvier 1987)*

***FINITE ELEMENT METHODS
IN ANALYSIS AND DESIGN
OF DAMS***

**CALCUL ET CONCEPTION
DES BARRAGES
PAR LES MÉTHODES
DES ÉLÉMENTS FINIS**



Janvier 1987

BULLETIN 30 a

AVERTISSEMENT – EXONERATION DE RESPONSABILITE:

Les informations, analyses et conclusions auxquelles cet ouvrage renvoie sont sous la seule responsabilité de leur(s) auteur(s) respectif(s) cité(s).

Les informations, analyses et conclusions contenues dans cet ouvrage n'ont pas force de Loi et ne doivent pas être considérées comme un substitut aux réglementations officielles imposées par la Loi. Elles sont uniquement destinées à un public de Professionnels Avertis, seuls aptes à en apprécier et à en déterminer la valeur et la portée et à en appliquer avec précision les recommandations à chaque cas particulier.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de cet ouvrage, compte tenu de l'évolution des techniques et de la science, nous ne pouvons en garantir l'exhaustivité.

Nous déclinons expressément toute responsabilité quant à l'interprétation et l'application éventuelles (y compris les dommages éventuels en résultant ou liés) du contenu de cet ouvrage.

En poursuivant la lecture de cet ouvrage, vous acceptez de façon expresse cette condition.

NOTICE – DISCLAIMER :

The information, analyses and conclusions referred to herein are the sole responsibility of the author(s) thereof.

The information, analyses and conclusions in this document have no legal force and must not be considered as substituting for legally-enforceable official regulations. They are intended for the use of experienced professionals who are alone equipped to judge their pertinence and applicability and to apply accurately the recommendations to any particular case.

This document has been drafted with the greatest care but, in view of the pace of change in science and technology, we cannot guarantee that it covers all aspects of the topics discussed.

We decline all responsibility whatsoever for how the information herein is interpreted and used and will accept no liability for any loss or damage arising therefrom.

Do not read on unless you accept this disclaimer without reservation.

FOREWORD

When this bulletin was written its objective was to introduce the practicing engineer to the application of finite element (and related) methods to the analysis of dams. Despite the passage of time both the basic introduction to the method and the assumptions necessary for intelligent use of this in analysis have not changed appreciably and hence the reprinted version can continue to fulfil its objectives.

Naturally in the intervening period the research and writing has continued. The number of papers dealing with the finite element application which appeared in that period can be counted in thousands while texts multiplied to a large number listed in the addendum. This activity when focused on the field of dam analysis resulted in :

- some more efficient elements libraries;
 - more rapid solution techniques;
 - streamlining of input and output processes including some automation of mesh generation and error estimates;
 - easier treatment of nonlinear problems;
 - more realistic description of material behaviour;
- etc.

Some of the problems mentioned in the bulletin as being still difficult are today capable of being readily solved on medium sized computers. Others are readily dealt with on micro-computers or workstations with which most consulting practices are equipped.

There is thus today little reason for avoidance of computation and the importance of making good use of it in safer and more economic designs places a considerable degree of responsibility on engineers' shoulders. We have stressed in this bulletin the need for formulating new *criteria of design* appropriate to the computer era and have indicated some paths which are today followed by some. However the problem of arriving at a rational and universally applicable "code" remains. In a Bulletin entitled "The Philosophy of Selecting Dam Design Criteria" (1) which concludes the 13 year existence of the present Committee we have sketched the path which, we believe, should be followed. However a serious attempt must be commissioned by ICOLD to achieve a code of practice which is acceptable to most.

While the bulletin in its present form outlines the general procedures and introduces the subject of analysis, the interested engineer should refer to two later bulletins in which we deal in more detail with problems of Earthquake Analysis of all dams (2) and with static design of earth dams (3) respectively. In the first

AVANT-PROPOS

Quand il fut écrit, ce Bulletin visait à initier les ingénieurs à l'utilisation des différentes méthodes des éléments finis pour le calcul des barrages. On peut constater aujourd'hui que cette présentation de la méthode de base et des hypothèses nécessaires à sa bonne utilisation, a résisté à l'épreuve du temps et qu'ainsi, la rédaction d'origine est toujours actuelle.

Naturellement, les recherches et les publications se sont poursuivies entre-temps. Les publications parues au cours de cette période et où l'on traite des applications de cette méthode, se comptent par milliers et la liste qui suit témoigne de la multiplication des textes. Dans le domaine du calcul des barrages, cette activité s'est traduite par :

- des bibliothèques d'éléments plus performants;
 - des techniques de résolution plus rapides;
 - la simplification des méthodes d'entrée/sortie accompagnée d'une certaine automatisation du maillage et du calcul d'erreurs;
 - une plus grande facilité de traitement des problèmes non-linéaires;
 - la reproduction plus réaliste du comportement des matériaux;
- etc.

Certains problèmes qualifiés, dans ce Bulletin, de « complexes » peuvent être résolus aujourd'hui avec un ordinateur de puissance moyenne. Pour d'autres, les micro-ordinateurs ou les terminaux dont sont équipés la plupart des bureaux d'ingénieurs-conseils sont suffisants.

Ainsi, aujourd'hui, il n'y a pas de raison de se priver de ce genre de calculs, mais leur bonne mise en œuvre pour aboutir à des projets plus sûrs et plus économiques, charge l'ingénieur d'une plus grande responsabilité. On a insisté dans ce Bulletin sur le besoin d'imaginer une nouvelle génération de *critères d'acceptation* appropriés à l'ère informatique et nous avons indiqué certaines voies actuellement suivies. Mais le problème demeure d'aboutir à un « code » rationnel et accepté par tous. Dans un Bulletin à paraître, « La philosophie du choix des hypothèses de calcul des barrages » (1), fruit des treize ans de réflexion du Comité, on ébauche la voie qui, croyons-nous, est à suivre, et la CIGB devrait poursuivre en nommant un Comité qui se mette sérieusement à la préparation d'un tel code ».

Ce Bulletin esquisse une méthodologie et présente l'objet des calculs mais, pour de plus amples détails, on peut maintenant se reporter à deux publications plus récentes qui traitent du calcul sismique des barrages en général (2) et du calcul statique des barrages en remblai (3). Dans le premier, le Comité présente les procédés pour le calcul complet en dynamique non-linéaire des barrages et

of these we describe procedures permitting full dynamic, non-linear analysis of dams and their foundations which, we hope, will become current practice.

The reader will be doubtless aware of many commercially available codes which allow both simple and coupled analysis to be carried out. These indeed have multiplied enormously since the time the bulletin was written. However our point remains unchanged despite this ready availability. The tool available is sharp and knowledge and care are necessary for its use.

O. C. ZIENKIEWICZ, F.R.S.

January 1987

(1) " The Philosophy for Selecting Dam Design Criteria " - Bulletin to be published by the end of 1987 or in early 1988, prepared by A. D. McConnell, J. Serafim, O. C. Zienkiewicz and R. Bischof.

(2) " Earthquake Analysis Procedure for dams. State of the Art " 1986 - Bulletin 52, prepared by O. C. Zienkiewicz, R. W. Clough and H. Seed.

(3) " Static Analysis of Earth Dams " 1986 - Bulletin 53, prepared by D. Naylor and Z. Eisenstein.

de leur fondation, en espérant que ce type de calcul devienne la norme pour tous les projets.

Il existe dans le commerce des codes permettant le calcul simple et avec couplage; en effet, leur nombre a augmenté notablement depuis la rédaction de ce Bulletin. Mais, malgré leur plus grande accessibilité, notre message reste le même : il s'agit d'un outil pointu, dont le maniement exige connaissances et soins.

O. C. ZIENKIEWICZ, F.R.S.

Janvier 1987

(1) « Philosophie du choix des hypothèses de calcul des barrages » - Bulletin à paraître fin 1987-début 1988, préparé par A. D. Mc Connell, J. Serafim, O. C. Zienkiewicz et R. Bischof.

(2) « Méthodes de calcul sismique pour barrages » 1986 - Bulletin 52, préparé par O. C. Zienkiewicz, R. W. Clough and H. Seed.

(3) « Calcul statique des barrages en remblai » 1986 - Bulletin 53, préparé par D. Naylor et Z. Eisenstein.

**Books and monographs
on finite element technology (*)**

by Ahmed K. NOOR

George Washington University Center, NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23665, USA

Since the publication of the first textbook on the finite element method in 1967 (ZIENKIEWICZ, O.C. and Y.K. CHEUNG, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London), over two hundred monographs and conference proceedings have been published on the subject. For the benefit of the readers of this journal, all of the English books and some of the foreign books that the author is aware of are listed herein. Also included is a list of the conference proceedings devoted solely to finite elements. The references are divided into the following eleven categories : fundamentals; mathematical foundations; structural and solid mechanics applications; fluid mechanics applications; other applied science and engineering applications; computer implementation and software systems; computational and modeling aspects; special topics; boundary element methods; bibliographies; and proceedings of symposia and conferences on finite element technology. The references in each of the first ten sections are arranged alphabetically, and in the last section they are arranged in chronological order.

**Bibliographie des publications relatives
aux techniques des éléments finis (*)**

par Ahmed K. NOOR

George Washington University Center, NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23665, USA

Depuis la publication du premier ouvrage sur la méthode des éléments finis, paru en 1967 (ZIENKIEWICZ, O. C. et CHEUNG, Y. K. « The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanis », McGraw-Hill, Londres, traduit en français sous le titre « Méthode des Éléments finis », EDISCIENCE, 1973) on a publié sur ce sujet plus de deux cents articles et rapports de Congrès. La liste ci-après indique tous ceux, en langue anglaise, connus de l'auteur, ainsi que certaines des publications parues en d'autres langues, et les comptes rendus des Congrès consacrés entièrement à ce sujet. La liste est divisée en onze rubriques : principes — bases mathématiques — applications au calcul de structures et à la mécanique des solides — applications à la mécanique des fluides — applications aux autres domaines technologiques — techniques informatiques et logiciels — techniques de calcul et modélisation — problèmes particuliers — traitement des éléments aux limites — bibliographies — comptes rendus des Congrès concernant la méthode des éléments finis. Sous les dix premières rubriques, les listes présentées en suivant l'ordre alphabétique des publications; la dernière est donnée en suivant l'ordre chronologique.

(*) This is a work of the United States Government under the provisions of Title 17, Section 105, of the US Code and, therefore, in the public domain.

Cet article, bien que propriété du Gouvernement américain (Article 105, Titre 17 du Code américain), est tombé dans le domaine public.

1. Fundamentals

- 1.1 BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- 1.2 BECKER, E. B., G. F. CAREY and J. T. ODEN, *Finite Elements : An Introduction. Vol. 1.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

- 1.3 CAREY, G. F. and J. T. ODEN, *Finite Elements : A Second Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- 1.4 CHEUNG, Y. K. and M. F. YEO, *A Practical Introduction to Finite Element Analysis*, Pitman, London, 1979.
- 1.5 COOK, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd ed., J. Wiley, New York, 1981.
- 1.6 DAVIES, A. J., *The Finite Element Method : A First Approach*, Clarendon Press, Oxford, 1980.
- 1.7 DESAI, C. S., *Elementary Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- 1.8 DESAI, C. S. and J. F. ABEL, *Introduction to the Finite Element Method, A Numerical Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
- 1.9 DHATT, G. and G. TOUZOT, *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*, Maloine SA, Paris, 1981; translated into English and published by Wiley, UK, 1984.
- 1.10 FENNER, R. T., *Finite Element Methods for Engineers*, Macmillan, London, 1975.
- 1.11 GALLAGHER, R. H., *Finite Element Analysis - Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- 1.12 HINTON, E. and D. R. J. OWEN, *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1979.
- 1.13 HUEBNER, K. H. and E. A. THORNTON, *The Finite Element Method for Engineers*, 2nd ed., Wiley, New York, 1982.
- 1.14 HUSTON, R. L. and C. E. PASSERELLO, *Finite Element Methods : An Introduction*, Dekker, New York, 1984.
- 1.15 IRONS, B. and S. AHMED, *Techniques of Finite Elements*, Wiley, New York, 1980.
- 1.16 IRONS, B. and N. SHRIVE, *Finite Element Primer*, Wiley, New York, 1983.
- 1.17 LIVESLEY, R. K., *Finite Elements : An Introduction for Engineers*, Cambridge University Press, New York, 1983.
- 1.18 MARTIN, H. C. and G. F. CAREY, *Introduction to Finite Element Analysis, Theory and Application*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- 1.19 NATH, B., *Fundamentals of Finite Elements for Engineers*, Athlone Press, London, 1974.
- 1.20 NORRIE, D. H. and G. DE VRIES, *The Finite Element Method*, Academic Press, New York, 1973.
- 1.21 NORRIE, D. H. and G. DE VRIES, *An Introduction to Finite Element Analysis*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1978.
- 1.22 ODEN, J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- 1.23 OWEN, D. R. J. and E. HINTON, *A Simple Guide to Finite Elements*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1980.
- 1.24 RAO, S. S., *The Finite Element Method in Engineering*, 1st ed., Pergamon Press, Elmsford, New York, 1982.
- 1.25 REDDY, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- 1.26 SCHWARZ, H. R., *Methode der Finite Elemente*, Teubner, Stuttgart, 1980.
- 1.27 SEGERLIND, L. J., *Applied Finite Element Analysis*, 2nd ed., Wiley, New York, 1984.
- 1.28 TONG, P. and J. N. ROSSETOS, *Finite Element Method - Basic Techniques and Implementation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- 1.29 ZIENKIEWICZ, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.

- 1.30 ZIENKIEWICZ, O. C., *Introductory Lectures on the Finite Element Method*, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, Springer, Berlin, 1978.
- 1.31 ZIENKIEWICZ, O. C. and B. MORGAN, *Finite Elements and Approximation*, Wiley, New York, 1983.

2. Mathematical foundations

- 2.1 AXELSSON, O. and V. A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1984.
- 2.2 AZIZ, A. K. (ed.), *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- 2.3 CIARLET, Ph., S. KESAVAN, A. RANJAN and M. VANNINATHAN, *Lectures on the Finite Element Method* by Ph. Ciarlet; notes by S. Kesavan, A. Ranjan and M. Vanninathan, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India, 1975.
- 2.4 CIARLET, P. G., *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Les Presses de l'Université de Montréal, Québec, 1976.
- 2.5 CIARLET, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Elsevier/North-Holland, New York, 1978.
- 2.6 DE BOOR, C. (ed.), *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1974.
- 2.7 FAIRWEATHER, G., *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations*, Dekker, New York, 1978.
- 2.8 GALLIGANI, I. and E. MAGENES (eds.), *Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606*, Springer, New York, 1977.
- 2.9 IKEDA, T., *Maximum Principle in Finite Models for Convection-Diffusion Phenomena*, Lectures Notes in Numerical and Applied Analysis, Vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- 2.10 LINK, M., *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*, Teubner, Stuttgart, 1984.
- 2.11 MERCIER, B., *Lectures on Topics in Finite Elements Solution of Elliptic Problems*, Springer, Berlin, 1979.
- 2.12 MITCHELL, A. R. and R. A. WAIT, *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1977.
- 2.13 NAKAZAWA, S. and D. W. KELLY, *Mathematics of Finite Elements - An Engineering Approach*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1983.
- 2.14 ODEN, J. T. and J. N. REDDY, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Wiley, New York, 1976.
- 2.15 ODEN, J. T. (in collaboration with G. F. CAREY), *Finite Elements : Mathematical Aspects, Vol. 4*, Prentice-Hall, New York, 1982.
- 2.16 STRANG, R. and G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, New York, 1973.
- 2.17 THOMEE, V., *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, New York, 1984.
- 2.18 VICHNEVETSKY, R., *Computer Methods for Partial Differential Equations, Vol. 1*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- 2.19 WACHSPRESS, E. L., *A Rational Finite Element Basis*, Academic Press, New York, 1975.
- 2.20 WHITEMAN, J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Academic Press, London, 1973.
- 2.21 WHITEMAN, J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications, Vol. 2*, Academic Press, London, 1977.

- 2.22 WHITEMAN, J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications, Vol. 3*, Academic Press, London, 1979.
- 2.23 WHITEMAN, J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications, Vol. 4*, Academic Press, London, 1982.

3. Structural and solid mechanics applications

- 3.1 ASHWELL, D. G. and R. H. GALLAGHER (eds.), *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Wiley, London, 1976.
- 3.2 BELYTSCHKO, T. and P. V. MARCAL (eds.), *Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Structural Behavior*, AMD Vol. 14, American Society of Mechanical Engineers, 1975.
- 3.3 BERNADOU, M. and J. M. BOISSERIE, *The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations*, Birkhauser, Boston, 1982.
- 3.4 BREBBIA, C. A. and J. J. CONNOR, *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, Wiley, New York, 1974.
- 3.5 BOWES, W. H. and L. T. RUSSEL, *Stress Analysis by the Finite Element Method for Practicing Engineers*, Lexington Books, Lexington, MA, 1975.
- 3.6 BUCK, K. E., D. W. SCHARPF, E. STEIN and W. WUNDERLICH (eds.), *Finite Elemente in der Statik*, Proceedings of a Conference held in Stuttgart 1970, Wilhelm Ernst ans Sohn, Berlin, 1973.
- 3.7 BURMAN, Z. I., *A Superelement Analysis of Stiffened Shells*, Izdatel'stvo Mashinostroe-nie, Moscow, 1982.
- 3.8 CHEUNG, Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, Elmsford, NY, 1976.
- 3.9 DAWE, D. J., *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1983.
- 3.10 GOULD, P. L., *Finite Element Analysis of Shells of Revolution*, Pitman, Marshfield, MA, 1985.
- 3.11 HINTON, E. and D. R. J. OWEN (eds.), *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1983.
- 3.12 HOLAND, I and K. BELL (eds.), *Finite Element Methods in Stress Analysis*, Lectures presented at the Technical University of Norway, January 6-11, 1969; published by TAPIR.
- 3.13 HUGHES, T. J. R., A. PIFKO and A. JAY (eds.), *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Washington, DC, November 15-20, 1981, AMD, Vol. 48, 1981.
- 3.14 KAMAL, M. M. and J. A. WOLF (eds.), *Finite Element Applications in Vibration Problems*, American Society of Mechanical Engineers, 1977.
- 3.15 KANDIDOV, V. P., S. S. CHESNOKOV and V. A. VYSLOUKH, *The Finite Element Method in Dynamics Problems*, Isdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow, 1980.
- 3.16 KORNEEV, V. G., *Finite Element Schemes of High Orders of Accuracy* (in Russian), Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, USSR, 1977.
- 3.17 MOROZOV, E. M. and G. P. NIKISHKOV, *The Finite Element Method in Fracture Mechanics* (in Russian), Izdatel'stvo Nauka, Moscow, USSR, 1980.
- 3.18 ODEN, J. T. and G. F. CAREY, *Finite Elements : Special Problems in Solid Mechanics, Vol. V*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- 3.19 OWEN, D. R. J. and E. HINTON, *Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1981.

- 3.20 PRZEMIENIECKI, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- 3.21 ROCKEY, K. C., H. R. EVANS, D. W. GRIFFITHS and D. A. NETHERCOT, *The Finite Element Method - A Basic Introduction*, 2nd ed., Halsted Press, Wiley, New York, 1980.
- 3.22 ROBINSON, J., *An Integrated Theory of Finite Element Methods*, Wiley, New York, 1973.
- 3.23 ROBINSON, J., *Understanding Finite Element Stress Analysis*, Robinson and Associates, Wimborne, UK, 1981.
- 3.24 ROSSMANITH, H.P. (ed.), *Finite Elemente in der Bruchmechanik*, Springer, Wien, 1982.
- 3.25 SCHAEFFER, H. G., *MSC/NASTRAN - Static and Normal Mode Analysis*, 2nd ed., Schaeffer Analysis, Mont Vernon, NH, 1982.
- 3.26 Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, "*State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete*", American Society of Civil Engineers, 1982.
- 3.27 TOTTENHAM, H. and C. A. BREBBIA (eds.), *Finite Element Techniques in Structural Mechanics*, Lectures presented at Southampton University, UK, April 1970.
- 3.28 URAL, O., *Finite Element Method : Basic Concepts and Applications*, Intext Educational Publishers, 1973.
- 3.29 WEAVER, W., Jr. and P. R. JOHNSTON, *Finite Elements for Structural Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

4. Fluid mechanics applications

- 4.1 BAKER, A.J., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- 4.2 CONNOR, J.C. and C.A. BREBBIA, *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworth, London, 1976.
- 4.3 CHUNG, T.J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- 4.4 GALLAGHER, R.H., J.T. ODEN, C. TAYLOR and O.C. ZIENKIEWICZ (eds.), *Finite Elements in Fluids, Vols. 1 and 2*, Wiley, New York, 1975.
- 4.5 GALLAGHER, R.H., O.C. ZIENKIEWICZ, J.T. ODEN, M.M. CECCHI and C. TAYLOR (eds.), *Finite Elements in Fluids, Vol. 3*, Wiley, New York, 1978.
- 4.6 GALLAGHER, R.H., D.H. NORRIE, J.T. ODEN and O.C. ZIENKIEWICZ (eds.), *Finite Elements in Fluids, Vol. 4*, Wiley, New York, 1982.
- 4.7 HUGHES, T.J.R. (ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*. Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, New York, December 2-7, 1979; Sponsored by Applied Mechanics Division, ASME, AMD Vol. 34 (1979).
- 4.8 KAWAI, T. (ed.), *Finite Element Flow Analysis. Proceedings of the Fourth International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems*, Held at Chuo University, Tokyo, July 26-29, 1982, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- 4.9 NORRIE, D.H. (ed.), *Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Flow Problems*. Third, Banff, 1980.
- 4.10 ODEN, J.T., R.H. GALLAGHER, O.C. ZIENKIEWICZ, M.T. KAWAHARA and T. KAWAI (eds.), *Finite Elements in Fluids, Vol. 5*, Wiley, London, 1983.
- 4.11 RAVIART, P.A., *Finite Element Methods in Fluid Mechanics*, Editions Eyrolles, Paris, Électricité de France, Direction des Études et Recherches, 1981.
- 4.12 TAYLOR, C. and T.G. HUGHES, *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1981.

- 4.13 THOMASSET, F., *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, New York, 1981.

5. Other applied science and engineering applications

- 5.1 CHARI, M.V.K. and P.P. SILVESTER, *Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems*, Wiley, New York, 1981.
- 5.2 GALLAGHER, R.H., B. SIMON, P. JOHNSON and J. GROSS (eds.), *Finite Elements in Biochemics*, Wiley, New York, 1982.
- 5.3 GUDEHUS, G. (ed.), *Finite Elements in Geomechanics*, Wiley, New York, 1977.
- 5.4 KAMAL, M.M. and J.A. WOLF (eds.), *Finite Element Applications in Acoustics*. Presented at the Vibrations Conference of the Design Engineering Technical Conference, Hartford, C.T., September 20-23, 1981, ASME.
- 5.5 NAYLOR, D.J. and G.N. PANDE, *Finite Elements in Geotechnical Engineering* (with chapters contributed by B. SIMPSON and R. TABB), Pineridge Press, Swansea, UK, 1981.
- 5.6 PINDER, G.F. and W.G. GRAY, *Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology*, Academic Press, New York, 1977.
- 5.7 SILVESTER, P.P. and R.L. FERRARI, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, London, 1983.
- 5.8 SIMON, B.R. (ed.), *Finite Elements in Biomechanics*, Proceedings of the International Conference held at the University of Arizona, Tucson, February 18, 1980, Vol. 1, Pineridge Press, Swansea, UK, 1980.
- 5.9 SMITH, G.N., *An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering*, Applied Science Publishers, London, 1971.
- 5.10 WILLIAMS, M.M.R., *Finite Element Methods in Radiation Physics*, Pergamon Press, Elmsford, NY, 1982.

6. Computer implementation and software systems

- 6.1 AKIN, J.E., *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, London, 1982.
- 6.2 ANDERSON, W.J., *MSC/Nastran : Interactive Training Program*, Wiley, New York, 1983.
- 6.3 BROWN, D.K., *An Introduction to Finite Element Methods Using BASIC Programs*, Surrey University Press, Glasgow, 1984.
- 6.4 *Finite Element Systems Handbook*, 2nd ed., CML Publications, Computational Mechanics Center, Ashurst Lodge, Hampshire, UK, 1983.
- 6.5 FREDRIKSSON, B. and J. MACKERLE, *Structural Mechanics : Finite Element Computer Programs — New Up-to-Date Fourth Edition*, Advanced Engineering Corporation, Linköping, Sweden, 1984.
- 6.6 FREDRIKSSON, B. and J. MACKERLE, *Finite Element Review*, Report AEC-L003, Advanced Engineering Corporation, Linköping, Sweden, 1978.
- 6.7 FREDRIKSSON, B. and J. MACKERLE, *Structural Mechanics : Pre- and Postprocessor Programs — Surveys and Availability*, Advanced Engineering Corporation, Linköping, Sweden, 1977.
- 6.8 HINTON, E. and D.R.J. OWEN, *Finite Element Programming*, Academic Press, New York, 1977.

- 6.9 *Introduction to Finite Element Structural Analysis*, Control Data Corporation, Minneapolis, MN, 1980.
- 6.10 ROSS, C.T.F., *Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- 6.11 SMITH, I.M., *Programming the Finite Element Method*, Wiley, New York, 1982.

7. Computational and modeling aspects

- 7.1 CONAWAY, J.H. (ed.), *Finite Element Modeling*, First Chautauqua on Finite Element Modeling, Harwichport, MA, September 15-17, 1980, Schaeffer Analysis, Mont Vernon, NH, 1980.
- 7.2 GLOUDEMANN, J.F. and R.E. ROSANOFF (eds.), *Computational Aspects of the Finite Element Method*, Bundesanstalt für Material Prüfung, Berlin, 1979.
- 7.3 ODEN, J.T. and G.F. CAREY, *Finite Elements : Computational Aspects. Vol. 3*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- 7.4 SHEPHARD, M.S. and R.H. GALLAGHER (eds.), *Finite Element Grid Optimization*, Presented at the Third National Congress on Pressure Vessels and Piping, San Francisco, CA, June 24-29, 1979, PVP-38, American Society of Mechanical Engineers, 1979.

8. Special topics

- 8.1 ATLURI, S.N., R.H. GALLAGHER and O.C. ZIENKIEWICZ (eds.), *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, Wiley, New York, 1983.
- 8.2 GLOWINSKI, R., E.Y. RODIN and O.C. ZIENKIEWICZ (eds.), *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 1979.
- 8.3 KARDESTUNCER, H., *Finite Element Methods Via Tensors*, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, 1974.
- 8.4 REDDY, J.N. (ed.), *Penalty-Finite Element Methods in Mechanics*, Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Phoenix, AZ, November 14-19, 1982, AMD Vol. 51, 1982.

9. Boundary element methods

- 9.1 BANERJEE, P.K. and R. BUTTERFIELD (eds.), *Developments in Boundary Element Methods I*, Applied Science Publishers, London, 1979.
- 9.2 BANERJEE, P.K. and R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- 9.3 BANERJEE, P.K. and R.P. SHAW (eds.), *Developments in Boundary Element Methods II*, Applied Science Publishers, London, 1982.
- 9.4 BREBBIA, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Wiley, New York, 1978.
- 9.5 BREBBIA, C.A. (ed.), *Progress in Boundary Element Methods*, Wiley, New York, 1982.
- 9.6 BREBBIA, C.A. (ed.), *Topics in Boundary Element Research. Vol. 1, Basic Principles and Applications*, Springer, Berlin, 1984.
- 9.7 BREBBIA, C.A., J.C.F. TELLES and L.C. WROBEL, *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*, Springer, Berlin, 1984.
- 9.8 BREBBIA, C.A. and S. WALKER, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworths, London, 1981.
- 9.9 CROUCH, S.L. and STARFIELD, *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, Allen and Unwin, Winchester, MA, 1983.

- 9.10 MUKHERJEE, S., *Boundary Element Methods in Creep and Fracture*, Applied Science Publishers, England, 1982.
- 9.11 TELLES, J.C.F., *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems, Lecture Notes in Engineering* (edited by C.A. BREBBIA and S.A. ORSZAG), Vol. 1, Springer, Berlin, 1983.

10. Bibliographies, handbooks, and historical accounts

- 10.1 BREBBIA, C.A. (ed.), *Finite Element Systems, A Handbook*, 2nd ed., Computational Mechanics Center, Springer, Berlin, 1982.
- 10.2 KARDESTUNCER, H. (ed.), *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- 10.3 NOOR, A.K. and W.D. PILKEY (eds.), *State-of-the-Art Surveys on Finite Element Technology*, ASME, New York, 1983.
- 10.4 NORRIE, D. and G. DE VRIES, *Finite Element Bibliography*, Plenum Press, New York, 1976.
- 10.5 ROBINSON, J., *Early FEM Pioneers*, Robinson and Associates, Dorset, UK, 1985.
- 10.6 WHITEMAN, J.R., *A Bibliography for Finite Elements*, Academic Press, London, 1975.

11. Proceedings of symposia and conferences on finite element technology

- 11.1 FRAEIJUS DE VEUBEKE, B. (ed.), *Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, Elmsford, NY, 1964.
- 11.2 PRZEMIENIECKI, J.S. et al. (eds.), *Matrix Methods in Structural Mechanics — Proceedings of the First Conference*, Wright-Patterson Air Force Base, OH, AFFDL-TR-66-80, October 26-28, 1965.
- 11.3 BERKE, L. et al. (eds.), *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, OH, AFFDL-TR-68-150, October 15-17, 1968.
- 11.4 *Proceedings of the Symposium on Finite Element Techniques*, Institut für Statik und Dynamik der Luft und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, 1969.
- 11.5 *Recent Advances in Matrix Methods of structural Analysis and Design*, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969, University of Alabama Press, 1969.
- 11.6 ROWAN, W.H. and R.M. HACKETT (eds.), *Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering*, November 13-14, 1969, Vanderbilt University, TN, 1969.
- 11.7 SORENSEN, M.S. (ed.), *Finite Element Techniques*, Symposium on Finite Element Techniques, University of Stuttgart, FRG, June 10-12, 1969.
- 11.8 GALLAGHER, R.H., Y. YAMADA, and J.T. ODEN (eds.), *Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design*, Proceedings of the First Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, August 25-30, 1969, University of Alabama Press, 1970.
- 11.9 BADER, R.M. et al. (eds.), *Proceedings of the Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, OH, AFFDL-TR-71-160, October, 1971.
- 11.10 *NASTRAN User's Experiences, Survey of NASTRAN Applications in Static and Dynamic Structural Analysis Problems*, Colloquium held at Hampton, VA, September 13-15, 1971, NASA TM-X-2378.
- 11.11 *Proceedings of the Conference on the Application of the Finite Element Methods to Stress Analysis Problems in Nuclear Engineering*, June 30-July 1, 1971, Ispra, Italy.

- 11.12 DESAI, C.S. (ed.), *Applications of the Finite Element Methods in Geotechnical Engineering, Finite Element Method in Geotechnical Engineering*, Proceedings of the Symposium held in Vicksburg, MS, May 1-4, 1972, Vols. 1, 2, and 3, 1972.
- 11.13 McCUTCHEON, J.O., M.S. MIRZA and A.A. MUFTI (eds.), *Finite Element Method in Civil Engineering*, Proceedings of the Specialty Conference held at McGill University, June 1-2, 1972, Montreal, Canada.
- 11.14 *NASTRAN User's Experiences, Application of NASTRAN to Static and Dynamic Structural Analysis*, Second NASTRAN User's Colloquium, Hampton, VA, September 11-12, 1972, NASA TM-X-2637.
- 11.15 ODEN, J.T., R.W. CLOUGH and Y. YAMAMOTO (eds.), *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, Proceedings of the Second U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, August 1972, University of Alabama in Huntsville, 1972.
- 11.16 *NASTRAN User's Experiences, Third NASTRAN User's Colloquium*, Hampton, VA, September 11-12, 1973, NASA TM-X-2893.
- 11.17 ODEN, J.T. and E.R.A. OLIVEIRA (eds.), *Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics*, The University of Alabama in Huntsville, 1973.
- 11.18 *Proceedings of the Workshop Meeting on Computational Aspects of the Finite Element Method*, September 17-18, 1973, University of Stuttgart, FRG.
- 11.19 YAMADA, Y. and R.H. GALLAGHER (eds.), *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis*, Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, University of Tokyo Press, 1973.
- 11.20 *Finite Element Application to Vehicle Design*, Proceedings of the International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Detroit, 1974, Society of Automotive Engineers, New York, 1974.
- 11.21 *Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods in Engineering*, December 6-7, 1974, Coimbatore, India : Sponsored and organized by Coimbatore Institute of Technology, 1974.
- 11.22 PULMANO, V.A. and A.P. KABAILA (eds.), *Proceedings of the 1974 International Conference on Finite Element Methods in Engineering*, University of New South Wales, August 28-30, 1974.
- 11.23 *NASTRAN User's Experiences, NASTRAN User's Colloquium*, Hampton, VA, September 9-11, 1975, NASA TM-X-3278.
- 11.24 *Proceedings of the Post Conference on Computational Aspects of the Finite Element Method, Third*, Imperial College of Science and Technology, London, September 8-9, 1975.
- 11.25 ROBINSON, J. (ed.), *Proceedings of the World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, October 12-17, 1975, Bournemouth, Dorset, UK.
- 11.26 BATHE, K.J., J.T. ODEN and W. WUNDERLICH (eds.), *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, U.S.-Germany Symposium held at Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, August 1976, MIT Press, 1977.
- 11.27 CHEUNG, Y.K. and S.G. HUTTON (eds.), *Finite Element Methods in Engineering*, Proceedings of the Second International Conference, University of Adelaide, Australia, December 1976, AIAA, 1977.
- 11.28 *NASTRAN User's Experiences, NASTRAN User's Colloquium*, Moffett Field, C.A. October 5-6, 1976, NASA TM-X-3428.
- 11.29 *Proceedings of the Workshop on Finite Elements*, Rennes, France, May 3-5, 1976; Sponsored by the Société Mathématique de France, Université de Rennes and Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 1976.
- 11.30 *Second International Symposium on Finite Methods in Flow Problems*, Santa Margherita Ligure, Italy, 1976, ICCAD Conference Series No. 2, 76; AIAA, 1976.

- 11.31 BERGAN, P.G. (ed.), *Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Geilo, Norway, August 1977.
- 11.32 *Sixth NASTRAN User's Colloquium*, Held at Cleveland, OH, 1977, NASA CP-2018.
- 11.33 ABEL, J.F., T. KAWAI and S.F. SHEN (eds.), *Interdisciplinary Finite Element Analysis*, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar held at Cornell University, 1978 : Sponsored by U.S. National Science Foundation and the Japan Society for Promotion of Science.
- 11.34 KARDESTUNCER, H. and W.W. BOWLEY (eds.), *Proceedings of the Symposium on the Unification of Finite Elements — Finite Differences and Calculus of Variations*, University of Connecticut, Storrs, 1978.
- 11.35 PAHL, P.J., E. STEIN, and W. WUNDERLICH (eds.), *Finite Element Method in Structural Design* (in German), Proceedings of the Conference held at Hannover Technical University, 1978, Wilhelm Ernst and Sohn, Berlin, 1978.
- 11.36 ROBINSON, J. (ed.), *Finite Element Methods in the Commercial Environment, Vols. 1 and 2*, Robinson and Associates, Dorset, UK, 1978.
- 11.37 *Seventh NASTRAN User's Colloquium*, held at Huntsville, Alabama, October 4-6, 1978, NASA CP-2062.
- 11.38 BATHE, K.J. (ed.), *Nonlinear Finite Element Analysis and ADINA*, Proceedings of the ADINA Conferences 1977, 1978, and 1979, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- 11.39 *Eighth NASTRAN User's Colloquium*, Held at Greenbelt, MD, October 30-31, 1979, NASA CP-2131.
- 11.40 GLOWINSKI, R., E.Y. RODIN, O.C. ZIENKIEWICZ and B.B. FRAEIJUS DE VEUBEKE (eds.), *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 1979.
- 11.41 KABAILA, A.P. and V.A. PULMANO (eds.), *Finite Element Methods in Engineering*, Proceedings of the Third International Conference in Australia on Finite Element Methods held at the University of New South Wales, Sydney, July 2-6, 1979.
- 11.42 KARDESTUNCER, H. (ed.), *Proceedings of the Symposia on the Unification of Finite Elements — Finite Differences and Calculus of Variations*, University of Connecticut, Storrs, 1979, 1980, and 1982.
- 11.43 MERCIER, B., *Lectures on Topics in Finite Element Solution of Elliptic Problems*, Springer, Berlin, 1979.
- 11.44 PISTER, K.S., R.R. REYNOLDS and K.J. WILLIAM (eds.), *Proceedings of the International Conference on Finite Elements in Nonlinear Mechanics (FENOMECH '78)*, August 30-September 1, 1978, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrt-konstruktionen, University of Stuttgart, FRG, 1979.
- 11.45 *Proceedings of the International Conference on Engineering Applications of the Finite Element Method*, May 1979, A.S. Computas, Hovik, Norway, 1979.
- 11.46 BREBBIA, C.A. (ed.), *New Developments in Boundary Element Methods*, Proceedings of the Second International Seminar at Southampton University, March 1980.
- 11.47 *Ninth NASTRAN User's Colloquium*, Proceedings of a Colloquium held at John F. Kennedy Space Center, FL, October 22-23, 1980, NASA CP-2151.
- 11.48 WANG, S., C. ALONSO, C. BREBBIA, W. GRAY and G. PINDER (eds.), *Finite Elements in Water Resources*, Proceedings of the Third International Conference held at the University of Mississippi, May 1980, CML Publications, Computational Mechanics Center, Ashurst Lodge, Hampshire, UK, 1980.
- 11.49 ABEL, J.F., T. KAWAI and S.F. SHEN (eds.), *Interdisciplinary Finite Element Analysis*, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar held at Cornell University, August 7-11, 1978, Cornell University, Ithaca, NY, 1981.

- 11.50 BREBBIA, C.A. (ed.), *Further Developments in Boundary Element Methods*, Proceedings of the Third International Seminar, July 1981, CML Publications, Computational Mechanics Center, Ashurst Lodge, Hampshire, UK, 1981.
- 11.51 HUGHES, T.J.R., D. GARTLING and R.L. SPILKER (eds.), *New Concepts in Finite Element Analysis*, Presented at the Applied Mechanics Conference, Boulder, CO, June 22-24, 1981, ASME AMD Vol. 44, 1981.
- 11.52 ROBINSON, J. (ed.), *New and Future Developments in Commercial Finite Element Methods*, Robinson and Associates, Dorset, UK, 1981.
- 11.53 ST. DOLTSINIS, J., K. STRAUB and K.J. WILLIAM (eds.), *FENOMECH '81, Proceedings of the Second International Conference on Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, FRG, August 25-28, 1981, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- 11.54 WUNDERLICH, W., E. STEIN and K.J. BATHE (eds.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr-Universität Bochum, FRG, July 28-31, 1980, Springer, Berlin, 1981.
- 11.55 BREBBIA, C.A. (ed.), *Boundary Elements*, Proceedings of the Fourth International Conference on Boundary Element Methods held at Southampton University, September 1982, CML Publications, Computational Mechanics Center, Ashurst Lodge, Hampshire, UK, 1982.
- 11.56 HE, G. and Y.K. CHEUNG (eds.), *Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods*, August 2-6, 1982, Gordon and Breach Science Publishers, Beijing, China, 1982.
- 11.57 HOLZ, P., U. MEISSNER, C.A. BREBBIA, G. PINDER and W. GARY (eds.), *Finite Elements in Water Resources, Vol. 4*, Proceedings of the Fourth International Conference held in Hannover, June 1982, Springer, Berlin, 1982.
- 11.58 KAWAI, T.P. (ed.), *Finite Element Flow Analysis*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, Chuo University, Tokyo, July 26-29, 1982, University of Tokyo Press, 1982.
- 11.59 *Proceedings of Symposium on Finite Element Method*, Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, Chinese Mathematics Society, Science Press, New York, Gordon and Breach Science Publishers, Beijing, China, 1982.
- 11.60 *Tenth NASTRAN User's Colloquium*, Held at New Orleans, May 13-14, 1982, NASA CP-2249.
- 11.61 BATHE, K.J., *Nonlinear Finite Element Analysis and ADINA*, Proceedings of the Fourth ADINA Conference, M.I.T., June 15-17, 1983, Pergamon Press, New York, pp. 625-931, 1983.
- 11.62 KARDESTUNCER, H. (ed.), *Unification of Finite Element Methods*, Elsevier/North-Holland, New York, 1984.
- 11.63 *Accuracy, Reliability and Training in Finite Element Technology*, Proceedings of the 1984 World Congress on Finite Element Methods, Robinson and Associates, Dorset, UK.

TABLE OF CONTENTS

	Page
A. The finite element method as the general analysis procedure	11
A.1. Introduction	11
A.2. Status of the finite element process in dam analysis	12
A.3. The displacement formulation and a basic element toolkit	16
A.4. Are new elements necessary for efficient dam analysis? — Singularities and infinity as topic for development	20
B. Static analysis — Methods, Assumption and Criteria	24
B.1. Type of calculations and assumptions	24
B.2. Geometric assumption of analysis; 2 or 3 D analysis? Shell or solid? Foundation extent?	26
B.2.1. Gravity, buttress and earth dams	26
B.2.2. Arch dams — shell or solid?	28
B.2.3. Extent of foundation analysed	29
B.3. Nature of loads	30
B.3.1. Porous nature of material — total versus effective stresses and water load	30

TABLE DES MATIÈRES

	Page
A. La méthode des éléments finis en tant que technique d'analyse d'application générale	11
A.1. Introduction	11
A.2. État actuel de la méthode des éléments finis pour le calcul des barrages ..	12
A.3. La formulation du problème à partir des déplacements de l'ouvrage — Jeu d'éléments de base	16
A.4. Faut-il de nouveaux éléments pour le calcul des barrages? — Les particularités et l'infini des lignes de recherche	20
B. Analyses statiques — Méthodes, hypothèses, critères	24
B.1. Types de calculs, hypothèses	24
B.2. Hypothèses géométriques — Calcul bi ou tri-dimensionnel? Coque ou ouvrages épais — Étendue de la fondation? ..	26
B.2.1. Les barrages-poids, à contreforts, les digues	26
B.2.2. Les barrages-voûtes — Des coques ou des ouvrages épais?	28
B.2.3. Étendue de la fondation	29
B.3. La nature des charges	30
B.3.1. La porosité — Contraintes effectives totales, la charge hydrostatique	30

B.3.2. Gravity loads and initial stresses	33	B.3.2. Charges dues au poids — contraintes initiales	33
B.3.3. Thermal (and shrinkage) stresses	35	B.3.3. Efforts thermiques et de retrait	35
B.3.4. Other static loads	36	B.3.4. Diverses charges statiques	36
B.4. Material properties and criteria for interpretation of stress analysis results	37	B.4. Caractéristiques des matériaux et critères d'interprétation des résultats des calculs	37
B.4.1. General difference in treatment of earth and concrete	37	B.4.1. Généralités — Différentes techniques utilisées pour le remblai et le béton	37
B.4.2. Tensile zones and singularities in concrete structures — Cracking	39	B.4.2. Zones de tractions et particularités dans les ouvrages en béton. Fissuration	39
B.5. Concluding remarks	42	B.5. Conclusion	42
C. Dynamic analysis — Methods, problems, criteria	43	C. Calcul dynamique - Méthodes, problèmes, critères	43
C.1. Introduction	43	C.1. Introduction	43
C.2. Standard dynamic analysis procedure	44	C.2. Méthode fondamentale ..	44
C.2.1. Finite element idealization	45	C.2.1. Représentation par éléments finis	45
C.2.2. Equations of motion	46	C.2.2. Équations de mouvement	46
C.2.3. Transformation to modal coordinates	49	C.2.3. Transformation en coordonnées modales	49
C.2.4. Dynamic response analysis	50	C.2.4. Calcul du comportement dynamique	50
C.3. Problem areas in earthquake analysis of dams	51	C.3. Aspects problématiques du calcul	51
C.3.1. Seismic input mechanism	51	C.3.1. Méthode d'application du séisme à l'ouvrage	51
C.3.2. Foundation-structure interaction	54	C.3.2. Interactions de l'ouvrage et de la fondation	54
C.3.3. Hydrodynamic interaction	57	C.3.3. Interaction hydrodynamique	57

C.3.4. Combined hydrodynamic and foundation interaction	61	C.3.4. Interaction mixte (fondation et eau stockée)	61
C.4. Application to engineering practice	62	C.4. Applications pratiques	62
C.4.1. Summary of current analysis capabilities	63	C.4.1. Résumés ou méthodes de calcul actuellement disponibles	63
C.4.2. Non linear dynamic response	64	C.4.2. Réponse dynamique non linéaire	64
C.4.3. Seismic design criteria	65	C.4.3. Performances sismiques	65
D. Some recommendations for future attention	68	D. Quelques recommandations concernant les problèmes à étudier	68
D.1. General	68	D.1. Généralités	68
D.2. Improvement of technique	69	D.2. L'amélioration des techniques	69
D.3. Extension of understanding of behaviour	69	D.3. L'extension de notre compréhension du comportement	69
D.4. Acceptable and logical design rules	71	D.4. Critères de conception	71

This paper has been prepared, on behalf of the Committee on Analysis and Design of Dams, by R. W. CLOUGH and O. C. ZIENKIEWICZ.

The French translation was done by M. LEROY.

Ce rapport a été préparé, au nom du Comité sur le Calcul et la Conception des Barrages, par R. W. CLOUGH et O. C. ZIENKIEWICZ.

La traduction française a été faite par M. LEROY.

COMMITTEE ON ANALYSIS AND DESIGN OF DAMS

Chairman <i>Président</i>	Prof. O. C. Zienkiewicz, Civil Engineering Dept., University of Wales, University College of Swansea, Swansea, U.K.	U.K. <i>G. B.</i>
Deputy Chairman <i>Vice-Président</i>	Prof. Ray W. Clough, Professor of Engineering, Room 775, Davis Hall, University of California, Berkeley, California 94720.	U.S.A.
Members <i>Membres</i>	Prof. M. Radu Priscu, Str. Pictor I. Negulici nr. 5, Bucarest 1, Roumanie.	ROMANIA <i>ROUMANIE</i>
	Mr. Giovanni Lombardi, Via A. Ciseri 3, CH 6600 Locarno, Suisse.	SWITZERLAND <i>SUISSE</i>
	Prof. Hans Bretschneider, Technischen Universität Berlin, 1 Berlin 10, Postfach 320.	GERMANY <i>ALLEMAGNE</i>
	Mr. Leroy Maurice, Coyne et Bellier 5, rue d'Héliopolis, 75017 Paris.	FRANCE
	Mr. Shri B. Pant, Chief Research Officer, Central Water & Power Research Station, P.O. Khadakwasla, Poona-24, India.	INDIA <i>INDE</i>
	Dr. M. Marazio and Dr. A. L. Fanelli, Via Carducci, 14, 20100 Milano, Italy.	ITALY <i>ITALIE</i>
Co-opted Members Secretary <i>Membres cooptés, Secrétaire</i>	Prof. Z. Eisenstein, Associate Professor of Civil Engineering, The University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.	CANADA

	Dr. J. Pedro, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Ave. do Brasil, Lisbon, Portugal.	PORTUGAL
	Prof. A. Alvarez, Escuela Tecnica Superior de Ingenieros de Caminos, Madrid, Spain.	SPAIN <i>ESPAGNE</i>
	Prof. Dr. Techn. Ivar Holand, The Norwegian Technical University, 7000 Trondheim, Norway.	NORWAY <i>NORVÈGE</i>
	Dr. A. KIRILLOV, U.S.S.R. National Committee of ICOLD, Gorky 11, Moscow, U.S.S.R.	U.S.S.R. <i>U.R.S.S.</i>
Correspondents <i>Correspondants</i>	Mr. A. P. Janod, Secretary General of ICOLD Commission Internationale des Grands Barrages, 22/30, av. de Wagram, Paris (8 ^e).	FRANCE
	PRESIDENT ICOLD (1973-1976), C. F. Groner, P. O. Box 14, 1322 Hovik, Norway.	NORWAY <i>NORVÈGE</i>
	Prof. Emanuelle Fumagalli, Ismes, Viale Giulio Cesar 29. 24100 Bergamo, Italy.	ITALY <i>ITALIE</i>
	Mr. W. R. Mitchell, C/-The Hydro-Electric Commission, Box 355 D, G.P.O., Hobart, Tasmania, 7001 Australia.	AUSTRALIA <i>AUSTRALIE</i>
	T. P. C. Van Robbræck Department of Water Affairs, Private Bag 313, Pretoria, South Africa.	SOUTH AFRICA <i>AFRIQUE DU SUD</i>
	Ladislav Votruba, Chairman of the CN COLD, Katedra hydrotechniky CVUT, Zikova 4, 16629 Praha 6, Dejvice Czechoslovakia.	CZECHOSLOVAKIA <i>TCHÉCOSLOVAQUIE</i>
	Prof. F. Arredi, Facolta Ingegneria, Costruzioni Idrauliche, Via Eudossiana, 18, Rome, Italy.	ITALY <i>ITALIE</i>

PREAMBLE

The terms of reference of the Committee (1) make it concerned with the use of modern numerical procedures as applied to the analysis – and hence designs of dams. Undoubtedly the most powerful tool available today for analysis of complex structures is the finite element method and it is for this reason that the report is concerned with it alone. Whilst other numerical techniques are available these can usually be considered as subclasses of the general finite element concept or particular simplified formulations of it - clearly therefore these are not rejected and much of what is said here is quite generally applicable.

In principle finite element methods allow any correctly specified problem of structural analysis to be solved but lack of sufficient data implies the use of many simplifications. It is important that the practicing engineer should understand the nature of such simplifications introduced at any stage and adjust his criteria of acceptable design accordingly.

(1) *Abbreviated terms of reference :*

The Committee will instigate research and promote discussion on topics concerned with :

(a) The nature of geometric and physical idealisation appropriate in the analysis of concrete and earth dams foundations.

(b) The criteria on which analysis results should be assessed.

(c) The numerical (computer based) methods by which analysis processes can be most efficiently carried out.

The quantitative assessment of safety and reliability coupled with achieving optimal design is the main objective.

PRÉAMBULE

La mission du Comité (1) est d'étudier l'emploi des techniques numériques les plus modernes pour le calcul des barrages (et par là, des projets). Il ne fait aucun doute que l'outil le plus puissant actuellement disponible pour le calcul des structures complexes est la méthode des éléments finis. C'est la raison pour laquelle le présent rapport se limite à cette méthode, à l'exclusion de toute autre. On peut en effet considérer que les autres techniques numériques ne forment que des sous catégories à l'intérieur du concept général des éléments finis, ou bien, ne sont qu'autant d'expressions simplifiées de cette méthode. Ainsi, il est évident que l'on n'élimine pas ces autres techniques; au contraire, les commentaires ci-dessous s'appliquent souvent à l'ensemble des méthodes.

En principe, les méthodes des éléments finis permettent de résoudre tous les problèmes de calcul de structures moyennant une formulation convenable, mais l'insuffisance des données de base implique l'utilisation de beaucoup d'hypothèses simplificatrices. Il importe que l'ingénieur comprenne la nature de ces hypothèses introduites dans le calcul, pour en tenir compte dans le choix des critères d'appréciation qui permettent de conclure à la validité du projet.

(1) *Rappel sommaire des activités du Comité :*

Le Comité entreprend des études et anime les échanges concernant :

– les méthodes de représentation des caractéristiques géométriques et physiques adaptées au calcul des barrages (béton et terre), et de leur fondation;

– les critères d'appréciation des résultats de calcul;

– les techniques numériques (c'est-à-dire : permettant l'emploi d'un ordinateur) les mieux adaptées.

Le but principal est de permettre une appréciation quantitative des paramètres « Sécurité-confiance » ainsi que de conduire à l'élaboration du projet optimal.

It is the object of this report to :

- (i) introduce the reader to the state of art of analysis tools available at the present time;
- (ii) underline the assumptions introduced and their applicability for various objects of design;
- (iii) discuss the nature of criteria which the engineer has to adopt in the interpretation of the analysis results.

Some recommendations on the changes in present day definitions of safe and acceptable design are clearly necessary. In this report we mention some of these but a further report is envisaged in which a more detailed attention to these subjects will be given. Present day definitions of " safety factors " and very different values assigned to these for various dam types are highly unsatisfactory.

Whilst most of the analysis outlined here is concerned with deformation behaviour -- a most clearly visible aspect of dam performance -- limit analysis of collapse is still at present an acceptable tool providing its acceptability can be verified. It is today possible however to study the deformations up to point of collapse and therefore the complete separation between the two approaches is less important today than it was some years ago. It is indeed anticipated that for collapse studies non-linear analysis of deformation will soon become a universal tool.

To conclude it is necessary to state that we feel strongly that the availability of numerical analysis tools does not dispense with the judgement of an experienced engineer. Improper use of refined computation can lead to disaster just as surely as improper use of blunter instruments. The experienced practitioner has now to face an additional challenge in questioning his judgements and assigning safe limits to the various parameters entering the computation. We hope that he will respond and that such understanding will lead to safer and often more economical designs.

Le présent rapport s'efforce de :

- (1) présenter l'état actuel des divers outils de calcul actuellement disponibles;
- (2) souligner les hypothèses utilisées ainsi que leur utilité compte tenu des divers objectifs du projet;
- (3) examiner la nature des critères employés par l'ingénieur pour interpréter les résultats.

Il est évident qu'il faut émettre quelques recommandations sur les modifications à apporter à la définition actuelle des vocables « sûr » et « acceptable » appliqués aux projets de barrage. Certaines sont mentionnées dans le présent rapport, mais on envisage de rédiger un autre rapport consacré à une étude plus poussée de cette question. En effet, les définitions actuelles du « coefficient de sécurité » ainsi que les différentes valeurs admises pour ce coefficient en fonction des différents types de barrages sont très peu satisfaisantes.

L'analyse ci après traite surtout du comportement en déformation (un des aspects les plus visibles du comportement des barrages); il n'en reste pas moins que l'analyse d'équilibre à la rupture est un outil acceptable, sous réserve de vérifications suffisantes. Nous savons aujourd'hui étudier les déformations allant jusqu'à la rupture et la différence entre les deux méthodes est ainsi moins marquée. On prévoit même que, pour les études à la rupture, l'analyse non linéaire des déformations deviendra l'outil universel.

En conclusion, il faut souligner que les auteurs sont convaincus que l'emploi des outils d'analyse numérique ne dispense en rien du jugement de l'ingénieur confirmé. L'utilisation incorrecte des calculs sophistiqués peut conduire à des catastrophes aussi sûrement que celle d'instruments insuffisamment précis. Ainsi, le praticien expérimenté se trouve maintenant en face d'un nouveau défi pour aboutir à des projets de barrages plus sûrs et, souvent plus économiques.

As additional background to this report the Committee recommends a study of the Proceedings of the International Symposium on Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, Swansea 1975 in which this Committee has participated.

Pour compléter le présent rapport, le Comité recommande au lecteur les C.R. du colloque international sur les critères et hypothèses à employer pour l'analyse numérique des barrages (Swansea, 1975), colloque auquel le comité assista.

PART A

FINITE ELEMENT METHOD AS THE GENERAL ANALYSIS PROCEDURE

A.1. INTRODUCTION

Numerical methods allied to powerful digital computers give today the possibility of solving almost all well defined physical problems within any accuracy desirable. The finite element process of discretising and approximating continuous problems has proved itself to be one of the most general and useful procedures. It is therefore natural for the Engineer concerned with such important structures as dams or nuclear reactors to turn to this numerical process for the answer to the questions posed at the analysis and design stages. While doing so he soon realizes that the cost of analysis rises rapidly with the complexity of the problem and that the *uncertainty of assumption* and often unavailability of suitable data makes over-elaboration of analysis a speculative exercise. Further, even with relatively simple assumptions introduced in the analysis, the question of interpretation of results and specification of the *design criteria* necessary for acceptance of the design presents considerable difficulties. Typical here is the question of infinitely large stresses occurring near "singularities" or "corners" when linear elastic behaviour models are used in the analysis.

Faced with these problems the engineer may nostalgically wish for a return of simple empirical procedures on which so often his designs were based in the past; however there is no such simple way of escape. He is

PARTIE A

LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS EN TANT QUE TECHNIQUE D'ANALYSE D'APPLICATION GÉNÉRALE

A.1. INTRODUCTION

Aujourd'hui, les méthodes numériques, associées aux ordinateurs puissants, permettent la solution de la quasi-totalité des problèmes physiques convenablement formulés et ceci, avec toute la précision souhaitée. Parmi ces méthodes, celle des éléments finis, qui permet l'analyse approchée des milieux continus par discrétisation, s'est classée parmi les plus utiles d'application générale. Dans ces conditions, il est normal que l'ingénieur ayant à traiter d'ouvrages aussi importants que les barrages ou les réacteurs nucléaires utilise cette méthode pour répondre aux problèmes posés au niveau de la mise au point du projet. Mais alors, il s'aperçoit que le prix croît rapidement selon la complexité du problème à analyser; en outre, *l'incertitude de certaines hypothèses* et, souvent, l'absence de données de base rendent discutables tout excès de complexité. Même lorsque les hypothèses de calcul sont relativement simples, on rencontre des difficultés pour interpréter les résultats obtenus et pour fixer des *critères d'acceptation*. Comme exemple de ce genre de difficulté nous citerons le cas des contraintes très fortes qui apparaissent au voisinage des singularités géométriques ou des angles quand on utilise des modèles en élasticité linéaire.

Face à ces problèmes, l'ingénieur pourra regretter la simplicité des techniques empiriques utilisées par le passé, mais il ne pourra se dérober. Il est moralement contraint de mettre en œuvre les meilleures mé-

morally bound to use the best methodologies available to ensure that his structures are safe and economical and it is up to him to decide at which point to make the compromise between elaboration of analysis, uncertainty of assumptions and economy so as to achieve adequate results.

He must not reject his previous experience which has, with few exceptions, led to reasonable and safe designs, but should use this as a guide in the interpretation and understanding of more refined results.

The object of this report is therefore to :

- a) provide a guide to the current state of the analysis process;
- b) indicate areas of development still required to improve technique;
- c) discuss the nature of currently made assumptions and the limits placed by these;
- d) indicate some possible acceptance criteria.

The paper is divided into four parts. In the first part, (A), we discuss the general status of the finite element method and its possibilities.

The second part (B) deals with essential static or quasi static analysis problems and in the third (C) dynamic-earthquake problems are discussed. The last part (D) summarises some of the points for which future attention has to be given.

A.2. STATUS OF THE FINITE ELEMENT PROCESS IN DAM ANALYSIS

The problems involved in analysis of continuum structures such as dams and their foundations are generally defined by differential equations or integral statements for which no closed form solution is possible, and recourse has to be made to numerical processes. Three fairly general and appar-

thodes actuelles pour s'assurer que ses ouvrages sont à la fois sûrs et économiques. C'est à lui de fixer les limites entre la complexité du calcul, l'incertitude des hypothèses et l'économie, pour obtenir le meilleur résultat.

Il ne doit pas renier son expérience antérieure qui a, à peu d'exceptions près, conduit à des projets raisonnables et sûrs, mais il doit l'utiliser comme un guide dans l'interprétation et la compréhension de résultats plus raffinés.

Compte tenu de ces remarques, l'objet du présent rapport est de :

- a) présenter les grandes lignes de la méthode à son niveau actuel d'élaboration;
- b) indiquer les domaines où les progrès restent à faire;
- c) étudier la nature des hypothèses actuellement admises et les limites qu'elles imposent;
- d) proposer certains critères d'acceptation.

Le rapport est divisé en quatre parties. Dans la première partie (A), on examine l'état actuel de la méthode des éléments finis et ses possibilités.

La deuxième partie (B) est consacrée aux principaux problèmes statiques ou quasi-statiques. Dans la troisième partie (C), on étudie les problèmes dynamiques liés aux séismes. La dernière partie (D) rappelle certains aspects à étudier dans l'avenir.

A.2. ÉTAT ACTUEL DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS POUR LE CALCUL DES BARRAGES

Les problèmes relatifs au calcul des milieux continus (barrage avec sa fondation) sont en général définis par un système d'équations différentielles, ou par une formulation intégrale; dans l'un et l'autre cas, aucune solution formelle n'est possible. Il faut alors recourir aux techniques numé-

ently different techniques exist for such "discretisation" :

- the finite difference process;
- boundary integral procedures;
- trial function methods.

The finite difference process appears to be most direct – and obvious. Here the differential equation is directly represented by an approximation involving values of the unknown of some specified trial points. Indeed its application to problems of dam analysis is the oldest – first recorded in the analysis of the **Aswan dam** by **L. F. Richardson** in 1908 (1) with similar techniques used later by Zienkiewicz, 1945 (2) employing Southwells relaxation methods (3).

Since advent of computers many finite difference solutions have been utilised and their generality is advantageous (4, 5, 6, 7). There are, however, two drawbacks :

- the local differential equations govern the problem and present a difficulty of introducing boundary conditions;
- the mesh in general must follow a regular pattern.

The « boundary integral procedures » present a mathematically elegant method which however has not yet been used to an appreciable extent in stress analysis (8-11). Once again limitations of boundary geometry are severe and further only linear, homogeneous situations can be dealt with without undue complexity.

Here a solution satisfying the essential governing equation in the interior of the structure is postulated in terms of unknown parameters which are then determined by satisfying approximately the boundary conditions.

The most practical group of methods – that of trial function approximation – starts with a general, *global integral statement* of the problem (such as may be available from energy or virtual work principles) and the distribution of unknown

riques. Il existe trois techniques générales et apparemment différentes pour une telle « discrétisation » :

- la méthode des différences finies;
- la méthode d'intégration aux limites;
- la méthode des fonctions d'essais.

La méthode des différences finies apparaît comme la plus directe et la plus évidente. Dans ce cas, l'équation différentielle est représentée directement par une approximation portant sur les valeurs du terme inconnu en certains points choisis. C'est cette technique qui fut appliquée la première au calcul des barrages. Le premier exemple connu concerne le calcul du barrage d'Assouan par L. F. Richardson en 1908 (1); plus tard, des techniques voisines furent utilisées par Zienkiewicz en 1945 (2) à l'aide des méthodes de relaxation de Southwell (3).

Depuis l'apparition des ordinateurs, on a utilisé un grand nombre de solutions par différences finies, leur généralisation présente des avantages (4, 5, 6, 7). Mais on constate deux difficultés :

- les équations différentielles d'espace régissent le problème, ce qui pose des difficultés pour introduire les conditions aux limites;
- dans l'ensemble, le maillage doit être régulier.

La méthode « d'intégration aux limites », satisfaisante sur le plan mathématique, n'a pas trouvé une grande application dans le calcul des contraintes (8, 11). Là encore, les limitations imposées à la géométrie aux limites sont sévères. En outre, si l'on veut limiter la complexité du calcul, ces techniques ne s'appliquent qu'aux milieux homogènes ayant des caractéristiques linéaires.

Elle consiste à se donner une solution satisfaisant à l'équation principale à l'intérieur de l'ouvrage; les paramètres inconnus sont ensuite déterminés en les ajustant pour satisfaire, le mieux possible aux conditions aux limites.

La famille de méthodes dont l'emploi est la plus commode est celle de l'approximation par fonctions d'essais. On commence par une *formulation intégrale globale* du problème (sur la base de la théorie du travail virtuel ou de l'énergie); on adopte l'hypo-

functions within the domain of interest is assumed to follow a form of :

thèse selon laquelle la distribution des fonctions inconnues dans le domaine concerné est donnée par :

$$\underline{u} = \sum N_i a_i = \underline{N} a, \quad [1]$$

in which :

où :

\underline{u} is the function (or functions) sought;

u représente la (ou les) fonction (s) à déterminer;

N_i is a set of *known* trial (shape) functions of the coordinates;

N_i une famille de fonctions essayées donc *connues* des coordonnées;

a_i is a discrete set of parameters.

a_i une famille de paramètres discrets.

These are now determined in a manner approximately satisfying both the interior and boundary conditions given by the global statements

(On calcule ces paramètres de façon à satisfaire approximativement aux conditions internes et aux conditions aux limites, données par la formulation globale.)

To note : Underlined symbols stand for matrices or vectors.

A noter que les symboles soulignés signifient des matrices ou vecteurs.

In this general form the method is classical, and its well known variants date back to the early part of the century [Rayleigh-Ritz procedures, Galerkin, etc. (12, 13)]. Since the mid-fifties the method has been given a "face lift" by introducing the concept of finite elements in which generally the body is divided into sub-volumes called *elements* and the trial functions are defined locally within each element with a_i (generally) associated with the value of the unknown at certain points called *nodes*. With this formulation two immediate advantages appear :

Sous cette forme générale, la méthode est classique. Les variantes bien connues datent du début de ce siècle [techniques Rayleigh-Ritz, Galerkin, etc. (12, 13)]. Depuis le milieu des années 1950, la méthode a subi un rajeunissement par l'introduction du concept des éléments finis. Ainsi, le milieu est divisé en sous-volumes, appelés « éléments », les fonctions d'essais étant définies localement à l'intérieur de chaque élément, et a_i étant (généralement) lié à la valeur du terme inconnu à certains endroits précis, appelés *nœuds*. De cette façon, on constate immédiatement deux avantages :

1) calculation of element properties can be standardised;

1) on peut normaliser le calcul des caractéristiques des éléments;

2) the assembly of the system of algebraic equations from which parameters a are found follows precisely the rules of structural assembly known to all engineers and for which well developed solution techniques exist.

2) l'élaboration du système d'équations algébriques permettant de trouver les paramètres a_i se conforme aux règles de calcul des structures, connues de tous les ingénieurs, et pour lesquelles il existe des techniques de résolution bien au point.

As "finite elements" of a fairly standard form can represent any desired geometry adequately the methodology is of great generality. Further, it becomes possible to reformulate both the finite difference and boundary integral solutions on a similar basis and thus the finite element process becomes today the all embracing tool with many variants based on different choice of unknowns (e.g. displacements, stresses, etc.) or of basic element expansions. The method is not confined to structural problems and its application to seepage flow, fluid mecha-

Les « éléments finis » de forme relativement normalisée pouvant reproduire convenablement toute forme quelconque, cette méthode présente un domaine d'application très large. En plus, il est alors possible de formuler la solution des deux autres méthodes ci-dessus (différences finies, intégration aux limites) de la même façon. Ainsi, la méthode des éléments finis englobe l'ensemble de ces méthodes. Il n'existe plus que des variantes, qui se distinguent les unes des autres seulement par le choix des termes inconnus (par exemple, les déplacements,

tics, etc., is now well developed and well described in texts (14-18).

The classification of numerical procedures given above is by no means all embracing. Collapse study methods used calculation of stability of earth dams form a group of procedures which are not easily described as a subclass of any of the general methods — although modified processes of some similarity have recently been developed in finite element studies. The so called arch-cantilever methods (trial load processes) used for arch dams form here another alternative classification. Although apparently based on a different physical model it can be argued that such methods are a particular application of the finite element process with “ interleaving elements ” and “ equilibrating assumptions ”. While some of such special procedures may well continue to be applied it is felt that the three general processes due to their wide applicability will replace largely the alternatives.

The present development of the finite element methods is such that considerable cost is often involved in the studies. Some engineers prefer therefore to reserve the use of this powerful tool for final stages of design only using simplified methods — often not requiring the use of computers — for the preliminary design, thus apparently endorsing a dichotomy of approach. Another view of this matter can however be taken. The finite element process is one of approximation — and the degree of approximation and cost are related. It will be found that most of the simplified methods are indeed similar to or identical to the finite element process carried out on a *very crude subdivision*. If such an interpretation becomes more common then the distinction between the alternative approaches will disappear and a better understanding of behaviour (which

contraintes, etc.), ou par l'agrandissement des éléments de base. Par ailleurs, l'application de la méthode n'est pas limitée aux problèmes de calcul des structures. Il existe un large champ d'application aux percolations en milieu poreux, à la mécanique des fluides, etc. (14, 18).

La classification ci-dessus des techniques numériques est loin d'être complète. Les calculs d'équilibre à la rupture utilisés pour l'étude de stabilité des digues constituent un groupe que l'on ne peut facilement considérer comme un cas particulier des méthodes générales dont il est question ci-dessus. (Néanmoins, on a récemment mis au point, dans les études pour éléments finis, des techniques modifiées qui se rapprochent de ces calculs). De même, la méthode de la « Trial Load » utilisée pour le calcul des barrages-voûtes permet une autre classification. Mais, bien qu'apparemment basée sur un modèle différent de l'ouvrage, cette méthode peut être considérée comme une application particulière de la méthode des éléments finis, comportant des éléments se recouvrant et des hypothèses d'équilibre. Certaines de ces techniques spéciales continueront à être utilisées; il semble cependant que, en raison de leur grand domaine d'application, les trois grandes techniques ci-dessus vont se substituer aux autres méthodes.

Dans l'état actuel de la technique, les calculs par éléments finis s'avèrent souvent très coûteux. Pour cette raison, certains aiment mieux réserver l'emploi de cet outil puissant aux dernières études du calcul du projet, préférant les méthodes plus simples (qui souvent n'exigent pas le calcul par ordinateur) pour les premières étapes. On pourrait croire donc que ces ingénieurs préconisent une approche mixte. Mais on peut voir les choses d'une autre façon : la méthode des éléments finis est une méthode approchée, la précision souhaitée étant fonction du coût. On constate que pour la plupart, les méthodes simples ci-dessus peuvent s'assimiler à une étude par éléments finis effectuée à l'aide d'un *maillage très grossier*. Si cette optique se généralise, il fera disparaître la distinction que l'on a l'habitude de faire entre les différentes approches

is always easier on the cruder model) will follow.

A.3. THE DISPLACEMENT FORMULATION AND A BASIC ELEMENT TOOLKIT

Clearly in the space provided it is not appropriate to derive the complete finite element theory; this can be found elsewhere (14). We shall limit ourselves therefore to a brief summary of the so-called "displacement" method in which the unknown function u represents the displacement state at any point of the volume analysed, Ω . This procedure remains to date the most widely used finite element approximation in structural analysis.

With the assumption of small strains we can write generally these as :

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{u} = \underline{L} \sum N_i a_i = \sum \underline{B}_i a_i = \underline{B} \underline{a},$$

\underline{L} is a linear operator,

$\underline{B}_i = \underline{L} N_i$ are matrices dependent on position only and in general;

a_i define some nodal displacements (which in dynamic analysis will be time dependant).

The approximating equilibrium statement is derived from virtual work considerations and is :

$$\int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{b} d\Omega - \int_l \underline{N}^T \underline{t} dl = 0,$$

$\underline{\sigma}$ are the stresses;

\underline{b} body forces;

\underline{t} boundary tractions on surface l .

If the stresses $\underline{\sigma}$ are dependant on the displacements \underline{u} and time t and the body forces \underline{b} are determined in terms of d'Alembert's principle as :

$$\underline{b} = \underline{b}_0 - \rho \underline{\ddot{u}} - \mu \underline{\dot{u}} \equiv \underline{b}_0 - \rho \underline{N} \underline{\ddot{a}} - \mu \underline{N} \underline{\dot{a}}, \quad [4]$$

where :

\underline{b}_0 is known;

$\underline{\ddot{a}}$ and $\underline{\dot{a}}$ are the accelerations and velocities of nodal values of displacement;

utilisées, et il s'ensuivra une meilleure connaissance du comportement de l'ouvrage, connaissance toujours plus facilement acquise à l'aide d'un modèle grossier.

A.3. LA FORMULATION DU PROBLÈME A PARTIR DES DÉPLACEMENTS DE L'OUVRAGE - JEU D'ÉLÉMENTS DE BASE

Il est évidemment impossible de décrire ici en détail la théorie complète des éléments finis, et d'ailleurs, celle-ci est exposée ailleurs (14). On se contentera d'étudier brièvement la méthode dite « des déplacements », pour laquelle la fonction inconnue u représente l'état des déplacements en un point quelconque du volume Ω . Cette méthode est la plus répandue actuellement pour le calcul des ouvrages.

Dans l'hypothèse de déformations de faible amplitude, on définit ces déformations ainsi :

\underline{L} un opérateur linéaire;

$\underline{B}_i = \underline{L} N_i$ = matrices dépendant seulement de la position et, en général;

a_i = déplacements aux nœuds (fonction du temps dans le cas d'analyse dynamique).

La condition approximative d'équilibre, obtenue à partir du principe des travaux virtuels, est donnée par :

$\underline{\sigma}$ = les contraintes;

\underline{b} = les forces volumiques;

\underline{t} = les efforts aux limites sur la surface l .

Si les contraintes $\underline{\sigma}$ dépendent des déplacements \underline{u} et du temps t , et si les forces volumiques \underline{b} sont déterminées d'après le principe de d'Alembert \ddot{u}

où :

\underline{b}_0 est connu;

$\underline{\ddot{a}}$ et $\underline{\dot{a}}$ sont respectivement les accélérations et les vitesses des valeurs des déplacements aux nœuds;

$\underline{\mu}$ is some representative viscosity matrix; — $\underline{\mu}$ est une matrice représentative de la viscosité;

then equation system (3) provides the basic set of equations requiring solution. This can be written as : alors l'équation (3) fournit les équations fondamentales à résoudre. On peut écrire, pour les problèmes dynamiques :

$$\underline{P}(\underline{a}) - \underline{F}_0 + \underline{M}\underline{\ddot{a}} + \underline{C}\underline{\dot{a}} = 0, \quad [5 a]$$

for dynamic problems or in the static case simply as : ou, pour les problèmes statiques :

$$\underline{P}(\underline{a}) - \underline{F}_0 = 0, \quad [5 b]$$

in which :

$$\underline{M} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \rho \underline{N} \, d\Omega; \quad \underline{C} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{\mu} \underline{N} \, d\Omega, \quad [5 c]$$

$$\underline{F}_0 = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{b}_0 \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{t} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 \, d\Omega, \quad [5 d]$$

and

$$\underline{P}(\underline{a}) = \int_{\Omega} \underline{B}^T (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0) \, d\Omega, \quad [5 e]$$

in which $\underline{\sigma}$ is determined by some constitutive relation from the strains $\underline{\varepsilon}$ and $\underline{\sigma}_0$ is the system of initial stresses present before analysis is started. If the behaviour of the solid material is linear elastic, i.e. if : dans les équations ci-dessus, $\underline{\sigma}$ est donnée par sa relation avec les déformations $\underline{\varepsilon}$; $\underline{\sigma}_0$ représente l'état de contraintes initial. En cas d'un comportement élastique et linéaire, c'est-à-dire, si :

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}_0, \quad [6]$$

in which \underline{D} is the matrix of elastic constants, then a special linearised form of [5] is applicable for a dynamic problem : où \underline{D} = la matrice de constantes élastiques, alors, pour les problèmes dynamiques, on écrit l'équation [5] sous une autre forme (linéarisée) :

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{C} \underline{\dot{a}} + \underline{M} \underline{\ddot{a}} - \underline{F}_0 = 0, \quad [7 a]$$

with a "stiffness matrix" defined as : dans ce cas la « matrice raideur » est donnée par :

$$\underline{K} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega. \quad [7 b]$$

In practice it is not generally possible to define and determine the viscosity matrix. $\underline{\mu}$ from which the matrix \underline{C} is determined. Thus it has become usual practice to express this damping matrix by a Rayleigh expression in terms of the stiffness and mass matrices :

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}. \quad [7 c]$$

Various values of the factors α and β can be used and the matter will be discussed further in section \underline{C} . For static situations this simultaneous system of differential equations reduces to a system of linear equations :

Dans la pratique, il est rarement possible de définir (et de déterminer) la matrice viscosité $\underline{\mu}$ nécessaire à la détermination de la matrice \underline{C} . Aussi, on a l'habitude de tenir compte de cette matrice d'amortissement au moyen d'une formule de Rayleigh, fonction des matrices de raideur et de masse :

Les valeurs données à α et β peuvent varier. On y reviendra au chapitre \underline{C} . Pour les études statiques, ce système d'équations différentielles se réduit à un système d'équations linéaires :

$$\underline{K} \underline{a} - \underline{F}_0 = 0. \quad [7 d]$$

In the section (C) dealing with dynamic problems the method of solving the ordinary differential equations of [5 a] or [7 a] will be discussed, while in section (B) we shall be concerned with ordinary linear or non-linear equations sets [7 b] or [5 b].

It should be noted that in all equations the calculations are performed element by element and that :

$$\underline{P}(a) \equiv \sum \underline{P}(a)^e \text{ etc.,} \quad [8]$$

where the contributions \underline{P}^e are those of subdomains Ω^e associated with sections or elements into which the whole domain is divided. The standard assembly rules of structural analysis are thus preserved.

Clearly the all crucial matter is the form of element appropriate to the problem in question — once this form and corresponding shape functions \underline{N} have been determined solution can proceed.

In the problems of solid mechanics analysis many elements have been developed (and indeed these are applicable to other situations). As with all properly designed elements a convergent solution of any desired accuracy can be achieved using successively finer subdivisions, the choice between these is strictly a matter of economy. In figures 1, 2 and 3 we show a list of well proven elements for dealing with plane (two dimensional, plane stress/strain or axisymmetric), three dimensional and shell problems. Most of the elements shown are well known and described in standard texts but appropriate references are given to all as annotated in the figures (19-30). Some comments on a few are however deserved :

First the isoparametric parabolic elements, figures 1 c and 2 c are dramatically improved by using a numerical integration process with 2 Gauss points in each direction (21-30). Indeed with such elements the stress sampling should always be done either of these Gauss points or by a linear extrapolation to nodes (31, 32) as these sampling points have special properties. This family of elements is probably the most efficient of the elements currently available and as their degeneration to fairly thin, almost shell like

Dans le chapitre C qui traite des problèmes dynamiques, on étudie la méthode adoptée pour la solution des équations différentielles ordinaires [5 a] et [7 a]. Le chapitre B se limite aux équations ordinaires linéaires ou non linéaires [7 b] ou [5 b].

Il est à préciser que, dans toutes les équations, les calculs sont faits élément par élément. En outre :

les termes \underline{P}^e correspondent aux sous-domaines Ω^e relatifs aux parties ou aux éléments divisant l'ensemble du domaine. On préserve ainsi les règles classiques d'assemblage de l'analyse structurale.

Compte tenu de ces remarques, il est évident que le problème essentiel concerne le choix de la forme d'élément à adopter. Une fois cette forme choisie (avec les fonctions de forme correspondantes \underline{N}), on peut procéder à l'analyse proprement dite.

Dans le domaine de la mécanique des solides, on a imaginé un grand nombre d'éléments; ces éléments restent valables dans d'autres domaines. Comme pour tous les éléments convenablement conçus, on peut détenir une solution convergente, la précision étant fonction de la finesse du maillage. Le choix dépend des dépenses consenties. Les figures 1, 2 et 3 montrent une série d'éléments classiques, utilisés pour les problèmes plans (bidimensionnel, contraintes/déformations planes, axisymétrie), tridimensionnels et coques minces. Pour la plupart, ces éléments sont bien connus et consignés dans la documentation habituelle mais les références correspondantes sont portées sur les figures (19-30). Certains cependant appellent quelques commentaires :

Premièrement les éléments paraboliques isoparamétriques (fig. 1 c-2 c) sont améliorés de façon spectaculaire si l'on utilise une intégration numérique avec deux points de Gauss dans chaque sens (21-30). En effet, dans le cas de ces éléments, l'évaluation des contraintes est toujours à faire : soit en ces points de Gauss, soit par extrapolation linéaire jusqu'aux nœuds (31, 32), car ces points présentent des caractéristiques spéciales. Cette famille d'éléments est probablement la plus efficace actuellement existante. En

sections, can be prescribed the necessity for introducing special shell type elements is not apparent in dam analysis. An analysis of a "shell type" dam by such elements is shown elsewhere in these proceedings (33).

Second, the parabolic family of incompatible elements of figures 1-3 *d* (22) appears to have almost the same accuracy in many situations as the full isoparametric parabolic element. With the incompatible internal degrees of freedom eliminated at the element forming stage the total degrees of freedom of the system are substantially reduced and this appears to be a very economical element. Unfortunately it performs well only in subdivisions which approximate to a parallelogram (or parallelepiped) pattern and may give substantial errors if used in a distorted manner. This is a serious limitation and at the present time this element should be used with caution. Improvements of this type of element to ensure a wider applicability have been investigated (34, 35). The latter reference shows how full convergence can be obtained.

Third, for fairly thin shell type structures the degenerate member of the three dimensional family shown in figure 3 *c* is very versatile. Reduced integration (2 Gauss in each direction) must again be used to obtain good results – and with this proviso the element, despite its simplicity, is one of the most powerful ones. If a flat "facet" approximation to shells is to be used triangle elements are desirable. Here a very efficient form of degeneration of the Clough-Tocher-Zienkiewicz-Irons-Cheung (26, 27) element to a non-conforming type achieved by Irons and Razzaque (28) offers excellent possibilities.

outre, grâce à la possibilité que nous avons de les dégénérer en éléments très minces (assimilables aux éléments de coques minces), on n'est pas obligé, pour le calcul des barrages, d'introduire des éléments de ce type (coques minces). L'exemple de calcul d'un barrage « en coque mince » à l'aide de ces éléments est expliqué ailleurs dans ces comptes rendus (33).

Deuxièmement, la famille d'éléments paraboliques incompatibles (fig. 1-3 *d*) (22) semble présenter, dans bien des cas, la même précision que l'élément isoparamétrique. Les degrés de liberté interne incompatibles étant éliminés lors de la mise en forme des éléments, le total des degrés de liberté du système est nettement plus faible. Ainsi, cet élément apparaît très économique. Malheureusement cet élément ne donne de bons résultats que dans le cas d'un maillage qui correspond approximativement au parallélogramme (ou au parallélépipède). Les distorsions peuvent introduire de sérieuses erreurs. Il s'agit là d'un inconvénient très grave. Ainsi, actuellement, il convient d'être prudent dans l'utilisation de cet élément. On a étudié des améliorations possibles permettant l'application plus généralisée de cet élément (34, 35). Cette dernière référence montre comment on peut obtenir la pleine convergence.

Troisièmement, pour les ouvrages assez minces, assimilables aux coques, l'élément dégénéré de la famille tridimensionnelle (fig. 3 *c*) est très polyvalent. Là encore, une intégration réduite (2 points de Gauss dans chaque direction) est nécessaire pour assurer des résultats satisfaisants. Cette réserve faite, cet élément est parmi les plus puissants, malgré sa simplicité. Pour une approximation en « facettes » des coques, les éléments triangulaires sont commodes. Dans ces cas, la dégénérescence de l'élément Clough-Tocher-Zienkiewicz-Irons-Cheung (26, 27) faite par Irons et Razzaque (28) a produit un élément très efficace et très prometteur.

A.4. ARE NEW ELEMENTS NECESSARY FOR EFFICIENT DAM ANALYSIS? – SINGULARITIES AND INFINITY AS TOPIC FOR DEVELOPMENT

The very limited catalogue of useful elements presented in the previous section is far from exhaustive and numerous other elements exist (or are being developed) which on occasion may be marginally superior. Some of these are discussed in the authors text – others appear in the ever increasing volume of finite element literature. None of these developments have however produced a dramatic improvement of general performance. However, *special purpose* elements can in some cases yield greater accuracy. Thus it appears to the writer that :

a) elements based on observed displacement and/or stress distribution occurring in such standard structures as gravity dams, arch dams, or earth dams may be developed to give approximate results for preliminary analysis at a cost even smaller than with classical trial load and similar assumptions :

b) new elements based on equilibrating (or nearly equilibrating) stress fields may yield improved results for the stress distributions.

Despite these possibilities the present stage of the development of the F.E.M. is such that computing costs are down to a reasonable level and major improvements will be in the *nature of input and output data handling – a subject which itself deserves a full paper.*

There are however two related problems where some development is vitally necessary. These concern the inability of standard elements (due to their polynomial shape function form) to deal adequately with singularities and infinite field variation (Fig. 4).

Much research work has been done and continues to be done in both fields. The treatment of *singularities* (particularly cracks) is of great importance in the subject of *fracture mechanics* and there three somewhat different approaches have been introduced :

A.4. FAUT-IL DE NOUVEAUX ÉLÉMENTS POUR LE CALCUL DES BARRAGES? – LES PARTICULARITÉS ET L'INFINI DES LIGNES DE RECHERCHES

La liste d'éléments utiles présentée ci-dessus est très limitée et loin d'être complète. Il existe (ou on met au point) bien d'autres éléments qui peuvent s'avérer plus efficaces parfois. Certains sont étudiés dans le présent rapport, et les autres sont traités dans la documentation toujours grandissante relative aux éléments finis. Ces recherches n'ont pas toujours abouti à une amélioration spectaculaire des performances. Cependant, dans certains cas, les *éléments spéciaux* peuvent améliorer la précision du calcul. Ainsi, il apparaît, pour nous que :

a) les éléments mis au point à partir des observations (déplacements, champ de contraintes) faites sur les barrages classiques (barrages poids, barrages voûtes, digues en remblai) permettraient d'obtenir des résultats approchés au stade du calcul préliminaire (avant-projet sommaire) à un prix encore plus faible que celui de la Trial Load ou des autres méthodes classiques;

b) les nouveaux éléments basés sur l'équilibre (ou le quasi-équilibre) des champs de contraintes pourraient donner de meilleurs résultats sur la répartition des contraintes.

Quelles que soient ces possibilités, on peut affirmer que, au stade actuel de la méthode des éléments finis, les prix de calcul ont atteint un niveau acceptable. Les principales améliorations à attendre concernent la *manipulation des données* (données de base et résultats de calcul) – *mais* c'est là un sujet qui mérite un rapport à lui tout seul.

Il subsiste cependant deux domaines où le besoin d'amélioration est vital. Il s'agit : de l'incapacité (de par leur fonction de forme polynomiale) des éléments standard de traiter convenablement les particularités de l'ouvrage, et les champs infinis (fig. 4).

L'étude des particularités (notamment les fissures) est très importante dans le domaine de la *mécanique des fractures*; on a suivi trois approches légèrement différentes les unes des autres :

In the first, special elements embracing the singularity are developed and used in conjunction with standard elements (36, 37, 38).

In the second approach a degeneration of standard isoparametric elements is used to achieve a singularity representation. One such degeneration consisting of moving the mid side node to the quarter portion gives a stress singularity of a type $1/\sqrt{r}$ and is useful (39, 40). Unlike the first process this device does not call for special elements and is therefore reasonably simple to implement.

The last procedure used requires the introduction of a shape function extending over the whole region and introduces therefore a parameter linking all elements. This is very costly if banded solution programs are used but is effective if the solution routine follows the « frontal » pattern (41, 42). Figure 5 illustrates then the possible categories of singularity solution.

In the context of singularities occurring near re-entrant corners of dams we recommend the second procedure which can be easily implemented.

The question of “infinity” is somewhat more “touchy”. It is after all difficult to visualise “finite-infinite elements”. Here a suitable answer must be developed and several avenues of approach are being investigated. Basically the essential requirement is to obtain a stiffness of the infinite domain Ω of figure 6 which can be coupled with the bounded region in which conventional finite elements are used. Clearly if this is attempted somewhat idealised properties of the infinite domain will have to be assumed (such as linearity, homogeneity, etc.).

One way of obtaining such a coupling stiffness is to use analytical solutions which solve the infinite problem exactly *for an approximated set of tractions* acting on the interface. Such solutions can be obtained using standard “influence” functions available from elasticity and the method of “Boundary Integrals” (8-11, 43) appears well suited for the purpose. It will immediately be noted that stiffness for the infinite domain arrived in this manner will *couple all nodal points on the interface* and

On élabore des éléments spéciaux incorporant la particularité. Ces éléments sont introduits ensuite dans le maillage d'éléments classiques (36, 37, 38).

On utilise des éléments isoparamétriques ordinaires dégénérés permettant de reproduire les particularités. Par exemple, le déplacement du nœud central en un point situé à 25 % de la longueur du côté en question produit une particularité dans les contraintes du type : $1/\sqrt{r}$. Cet élément est utile (39, 40). Contrairement à la première approche, celle-ci n'exige pas d'éléments spéciaux, son utilisation étant, de ce fait, relativement simple.

On introduit une fonction de forme sur l'ensemble de la région et, par là, un paramètre reliant l'ensemble des éléments. Cette méthode coûte cher dans le cas de programmes de solutions par bandes, mais elle est utile si la procédure est du type « frontal » (41, 42). La figure 5 montre ces différentes méthodes de reproduction des particularités.

En ce qui concerne les particularités au voisinage des coins rentrant, nous recommandons la deuxième méthode qui elle est d'une utilisation facile.

La question de l'infini est plus délicate. En effet, il est difficile de saisir les « éléments finis infinis »! Mais il faut une solution et diverses lignes de recherche sont suivies. Il s'agit essentiellement d'obtenir une raideur du domaine infini Ω (fig. 6) que l'on peut relier à la région limitée à l'intérieur de laquelle on utilise les éléments finis classiques. Il est évident qu'il en résulte nécessairement des caractéristiques quelque peu idéalisées pour le domaine infini (linéarité, homogénéité, etc.).

On peut obtenir cette raideur de liaison à l'aide de solutions analytiques permettant la solution exacte du problème infini *pour des valeurs approchées des forces appliquées* à l'interface. On peut obtenir ces solutions à l'aide de fonctions d'influence classique, prises dans le domaine de l'élasticité; la méthode dite « d'intégrales aux limites » semble bien adaptée. On voit tout de suite que la raideur ainsi obtenue pour le domaine infini *relie tous les nœuds à l'interface*, augmentant la largeur de bande de la solution

hence increase the band width of solution for 3 dimensional problem to uneconomic proportions. The classical methods of Vögt (44) used frequently in arch dam analysis are essentially such a process with however the influence confined to the narrowest band by a drastic over-simplification. Despite this it is well known that in case of arch dams adequate results may be obtainable with the Vögt formulation (probably due to the insensitivity of the structure to foundation displacements). It appears therefore possible to pursue the Boundary Integral formulation and subsequently narrow the band by a condensation process. This is yet to be accomplished but work on such possibilities is in progress.

A coupling of the finite element idealization with foundation Vögt coefficient is today widely practised for linear static analyses and is found to be economical.

When considering the foundation statically, some engineers disregard altogether the upstream portion of it (dealing thus with a quarter space). Justification for this is in the fact that fissures may well develop in this part. This certainly is a useful extreme of computation assumptions.

An alternative to the use of exact solutions may be the adoption of elements of infinite extent. In such elements displacement assumptions must be such as to give asymptotic results to the exact solution. If this procedure proves successful the immediate narrowing of band for unknowns and the possibility of using different material properties in each "infinite" element makes much to recommend this scheme. Some elements of this type have already been introduced in the context of fluid mechanics (45, 46).

As the treatment of infinity by the methods described is as yet not sufficiently developed it is common practice (in static problems) to assume that at a certain suitable depth (such as that of the interface I of Fig. 6) the displacements are zero. If this depth is chosen to be sufficiently large, then by St. Venant's principle, the stresses in the main structure will not be substantially affected and correct results will be obtained

(pour les problèmes tridimensionnels) jusqu'au point où le prix est trop élevé. Les méthodes de Vögt (44) souvent utilisées pour le calcul des barrages relèvent essentiellement du même processus, sauf que l'influence est limitée à la bande la moins large par une simplification excessive. Mais néanmoins, il est bien connu que les résultats obtenus par la formulation de Vögt pour les barrages-voûtes sont acceptables (vraisemblablement à cause de l'insensibilité de l'ouvrage aux déplacements de la fondation). Ainsi, il semble possible de poursuivre cette méthode de « l'intégrale aux limites », moyennant une considération par la suite pour limiter la largeur de bande. Ce but n'est toujours pas atteint, mais les recherches continuent.

Très souvent, les éléments finis sont associés à un coefficient de fondation de Vögt pour le calcul statique en linéarité en raison des économies ainsi obtenues.

Dans le calcul statique, certains éliminent la partie amont de la fondation (on étudie un quart du volume), soutenant que les fissures risquent d'apparaître dans cette partie. C'est une hypothèse sévère mais très utile.

Il serait possible aussi d'adopter des éléments d'étendue infinie. Pour de tels éléments, les hypothèses relatives aux déplacements doivent permettre des résultats s'approchant de la solution exacte de façon asymptotique si cette approche réussit, les deux conséquences qui s'ensuivent : diminution immédiate de la largeur de bande des termes inconnus; possibilité de faire varier les caractéristiques du matériau dans chaque élément « infini » la rendra très recommandable. On a déjà introduit certains éléments de ce type dans le domaine de la mécanique des fluides (45, 46).

Les techniques de prise en compte de l'infini, décrites ici n'étant pas suffisamment perfectionnées, supposent (pour les calculs statiques) qu'à une profondeur donnée (par exemple, interface F I, fig. 6), les déplacements deviennent nuls. Pour une profondeur suffisamment grande la loi de St Venant veut que les contraintes dans l'ouvrage restent insensibles; ainsi les résultats obtenus sont corrects. Cette approximation se re-

for these. This approximation is consistent with model studies where for obvious reasons the model has to be encased in a finite mould. It is desirable to extend this fixed boundary at least to 2-4 times the height of the structure to obtain good results.

When a very non homogeneous foundation exists, greater depths need to be often taken into consideration and attention given to variability of rock properties.

It must be noted in this stage that the displacements of the structure will only be correctly obtained in *three dimensional problems* where a semi infinite body loaded by a finite load gives finite displacements. *For any two dimensional idealisation displacements will increase without limit as the fixed interface moves away from the main structure* and one can only deal in such cases with relative displacements.

When dynamic problems are considered the question of infinity appears to be of even larger importance. Here the foundation introduces damping as the wave energy disperses. Specifications of a fixed boundary introduces spurious reflections and special devices have been used to avoid such reflections (47, 48, 49). However in many problems of response studies it appears that fixing the boundaries yields adequate answers.

Possibility of "infinite elements" and introduction of wave type solutions has been investigated in context of sea wave problems (50, 51) and undoubtedly similar methods will be introduced here.

coupe bien avec les essais sur maquettes, pour lesquels le modèle doit nécessairement être contenu dans un moule fini. Il est souhaitable de fixer cette limite à une profondeur égale à 2 à 4 fois la hauteur du barrage pour obtenir des résultats corrects.

Pour les fondations fortement non homogènes, il faut la placer encore plus bas et on doit faire attention aux variations des caractéristiques du rocher.

Il est à noter ici que l'on ne pourra obtenir des déplacements corrects (*pour un problème tridimensionnel*) que dans le cas d'un volume semi-infini chargé par une charge finie et subissant des déplacements finis. *Pour une représentation bidimensionnelle, les déplacements obtenus augmentent de façon illimitée à mesure que l'interface limite s'éloigne de l'ouvrage*; dans ce cas, seuls les déplacements relatifs sont accessibles au calcul.

Pour les problèmes dynamiques, le problème de l'infini semble encore plus critique. Dans ce cas, la fondation fait apparaître un phénomène d'amortissement qui accompagne la dispersion de l'énergie ondulatoire. Mais l'introduction d'une limite fixe produit des réflexions parasites, et des dispositifs particuliers sont souvent nécessaires pour les éviter (47, 48, 49). Dans bien des cas de calcul de la réponse de l'ouvrage, il apparaît cependant qu'une limite fixe permet d'obtenir des résultats valables.

La possibilité d'utilisation « d'éléments infinis » et l'introduction de méthodes ondulatoires sont deux possibilités étudiées dans le domaine de l'étude des vagues (50, 51) et on peut s'attendre à voir l'adoption de méthodes analogues pour le calcul des barrages.

PART B

STATIC ANALYSIS METHODS, ASSUMPTIONS AND CRITERIA

B.1. TYPE OF CALCULATIONS AND ASSUMPTIONS

In the context of static dam design the use of the finite element method ranges widely. Typical categories are here :

1. Static linear elastic analysis.
2. Static non linear analysis.
3. Direct collapse analysis (safety factor analysis).
4. Optimisation of design by automatic means.

The objectives of analysis are (or should be) the improvement of safety and working performance of the dam and the determination of the most economical design with constraints imposed. The specification of the "safety factor" is a matter of some conjecture even if probabilistic approaches are taken. Generally agreed definitions are needed here — but it can be taken as axiomatic *that under the maximum loads to which the dams will be subjected and with given strength of the materials (i.e. concrete, foundation rock or fill), the deformation of the structure and its watertightness should be acceptable.* It is often argued that the factor of safety is a number by which the strength properties can be reduced before failure occurs. As many parameters are frequently used to define the "strength" it is difficult to know in what proportion each should be reduced and here some ambiguity arises, which in due course must be resolved. Whatever the specification, *a full non linear*

PARTIE B

ANALYSES STATIQUES MÉTHODES, HYPOTHÈSES, CRITÈRES

B.1. TYPES DE CALCULS, HYPOTHÈSES

Dans le domaine du calcul statique des barrages, on constate une grande variété dans les techniques d'éléments finis utilisées. On peut citer :

1. Le calcul statique en élasticité linéaire.
2. Le calcul statique non linéaire.
3. Le calcul direct de l'équilibre limite (à la rupture) (calcul du coefficient de sécurité).
4. L'optimisation automatique des dimensions de l'ouvrage.

Le but des calculs est (ou devrait être) l'amélioration de la sécurité et du comportement du barrage en exploitation, ainsi que la recherche du projet le plus économique, compte tenu des contraintes imposées. Le « coefficient de sécurité » est toujours discutable, même en cas d'une approche probabiliste. Dans ce domaine nous avons besoin de définitions acceptées de tous. Mais on peut affirmer qu'il est évident que, *compte tenu des charges maximales appliquées et de la résistance des matériaux (béton, fondation rocheuse, remblais), la déformation et l'étanchéité de l'ouvrage doivent rester dans certaines limites.* Certains voient dans le coefficient de sécurité un chiffre qui caractérise la réduction admissible de la résistance du matériau considéré, avant que celui-ci ne se rompe. Mais, étant donné le grand nombre de paramètres entrant dans la définition de la « résistance », il est difficile de déterminer le facteur de réduction de chacun. Il y a là une ambiguïté qui devra être résolue

analysis (2) will give all the necessary information to predict both working behaviour and ultimate (failure) load conditions. While this is desirable for the final design stage it must be remembered that :

a) data about the full non linear behaviour of the material are often scarce or not available, and that

b) the cost of a full non linear analysis is of the order of 5-10 × that of a linear elastic analysis.

It is therefore customary to use the assumption of linear elastic behaviour for preliminary analysis of concrete dams under working loads and to approach the ultimate (collapse) behaviour by a *simplified "probable collapse mechanism" assumption.*

If ideal plasticity assumptions are introduced certain bounding theorems can be used for approximate collapse analysis – but unfortunately neither concrete nor earth obey these idealized plasticity theorems and collapse loads are often not unique. Useful results can however be obtained by study of collapse mechanisms and recently finite element procedures have been used to derive collapse conditions directly (52, 53). As such work is still in research stage we shall assume that such direct collapse calculations are at present stage available only approximately by classical processes and will subject the *dam to a collapse test after working load conditions have been adequately studied by a numerical analysis.*

A complete non linear study of working/collapse load behaviour is today possible, but costly. This however should be the aim of future development.

In this section we shall therefore concentrate on the procedures of deformation study. In this context we shall examine :

a) the acceptable geometric assumptions introduced to the analysis;

tôt ou tard. Quelle que soit la définition adoptée pour le coefficient de sécurité, il est certain que *le calcul complet non linéaire (2) fournit toutes les indications nécessaires à la prédiction du comportement en service et des conditions de rupture.* Néanmoins, si un tel calcul est souhaitable au niveau du projet définitif, il ne faut pas oublier que :

a) les données relatives au comportement non linéaire du matériau sont souvent rares ou absentes, et que :

b) le prix d'un calcul non linéaire complet se situe à 5 ou 10 fois le prix d'un calcul en élasticité linéaire.

Dans ces conditions, on adopte généralement l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire au stade des études d'avant-projet des barrages en béton soumis aux charges normales, et l'on étudie de façon approximative le comportement à la rupture à l'aide d'une *hypothèse simplificatrice concernant le « mécanisme de rupture probable ».*

L'adoption de l'hypothèse de la plasticité pure permet l'utilisation de certaines conditions aux limites en calcul approximatif de rupture. Mais malheureusement ni le béton ni la terre n'obéissent à ces lois de plasticité pure, et souvent, les charges de rupture ne sont pas univoques. Il n'en reste pas moins que l'étude des mécanismes de rupture fournit des résultats utiles; depuis peu, on utilise la méthode des éléments finis dans le but d'obtenir directement les conditions de rupture (52, 53). Ces études étant pour l'instant à l'état de recherches, il faut supposer que le calcul direct n'est actuellement justiciable que de façon approchée à l'aide des méthodes classiques. Dans ces calculs, *le barrage est soumis à un essai de rupture après étude suffisante, par calcul numérique, des cas de charge d'exploitation.*

Le calcul complet, non linéaire du comportement sous charge de service et sous charge de rupture est actuellement possible, mais onéreux. Les recherches doivent viser ce but.

Ainsi, dans ce qui suit, on étudiera plus particulièrement les méthodes de calcul des déformations. On examinera les éléments suivants :

a) les hypothèses concernant la géométrie;

- b) the nature of " loads ";
- c) the nature of material non linearity necessary for various stages of analysis;

d) the interpretation of analysis in terms of acceptable behaviour criteria.

A certain amount of " dogmatism " will be introduced to guide the designer in the present stage of the development but areas of " question " requiring further research and decision will be emphasised.

B.2. GEOMETRIC ASSUMPTION OF ANALYSIS – 2 OR 3 D ANALYSIS? – SHELL OR SOLID? – FOUNDATION EXTENT?

All dams together with their foundations are clearly three-dimensional objects – and in principle at least, three dimensional analysis should always be used. As the cost of three-dimensional analysis is likely to be, typically, in the range of 5-15 times that of a two-dimensional approximation (and often much larger) the designer has to consider whether errors introduced by such an assumption are acceptable and on the safe side.

B.2.1. Gravity, buttress and earth dams

In figure 7 we illustrate a typical gravity and an earth dam. On the section of the former we show a typical element mesh for simple, linear triangles while in the latter a typical mesh with isoparametric parabolic elements of approximately same accuracy is used.

In two-dimensional analysis a typical mesh for adequate accuracy uses some 500 mesh points (or 1 000 DOF) (*) with the triangular elements. Assuming that tetrahedra of similar accuracy are used for the three dimensional analysis some 20-fold increase of mesh points would be needed, corresponding to $20 \times 500 \times 3 = 30\,000$ DOF. The corres-

(*) DOF : degrees of freedom.

- b) la nature des « charges »;
- c) la nature des caractéristiques de non-linéarité du comportement des matériaux, caractéristiques nécessaires à diverses étapes du calcul;

d) l'interprétation des résultats, compte tenu des critères d'acceptabilité adoptés.

Dans cet examen, le « dogmatisme » est nécessaire afin d'orienter l'ingénieur désireux de connaître l'état actuel de la méthode, mais on ne manquera pas de signaler les domaines où des problèmes se posent et qui exigent un effort de recherche complémentaire.

B.2. HYPOTHÈSES GÉOMÉTRIQUES – CALCUL BI OU TRI-DIMENSIONNEL? – COQUES OU VOLUMES – ÉTENDUE DE LA FONDATION?

Il est évident que le barrage avec sa fondation est un objet tridimensionnel. Ainsi, au moins théoriquement, un calcul tridimensionnel est toujours préférable. Mais le prix d'un tel calcul étant de 5 à 15 fois supérieur (ou plus) à celui du calcul approché bidimensionnel, on est amené à se demander si les erreurs introduites par la représentation bidimensionnelle sont acceptables, ou si ces erreurs vont dans le sens pessimiste (et donc, de la sécurité).

B.2.1. Les barrages-poids, à contreforts, les digues

Deux types de barrage (poids, remblai) sont représentés sur la figure 7. Sur le profil du barrage-poids, on a figuré le maillage correspondant aux simples éléments triangulaires linéaires; sur celui de la digue, on aperçoit une maille faite d'éléments paraboliques, isoparamétriques conduisant à une précision presque identique.

Pour le calcul bidimensionnel, une maille permettant une précision suffisante comporte environ 500 nœuds (1 000 degrés de liberté), les éléments étant de forme triangulaire. Dans le cas du calcul tridimensionnel, supposant des tétraèdres de précision analogues, on multiplie par 20 le nombre de nœuds, ce qui correspond à $20 \times 500 \times 3 = 30\,000$ de-

ponding figures for the isoparametric parabolic elements would be 100 mesh points or 200 DOF in two dimensions and say $6 \times 300 \times 3 = 3\,600$ DOF for three dimensions. The need for use of isoparametric elements is well illustrated here and so is the increase of cost in using three dimensional, solid analysis.

What is the accuracy of the two dimensional approximation and is it admissible? In the gravity dam it is often assumed that vertical joints are not grouted and hence for such dams under gravity loading the assumption appears reasonable. However the water loads act on a keyed and grouted structure. Here a three-dimensional action will occur in all but very long dams and a recent study carried out assuming homogeneous action and three-dimensional behaviour of such dams is presented elsewhere (54) with some results summarised in figure 8.

It would appear that the 3 D action seriously affects the stresses in the *cross section plane* — and indeed generally reduces their magnitude. Should this three-dimensional action be taken account of in design? It is the opinion of the author that this is here not necessary or desirable as shrinkage or thermal effects may cause a separation of the joints (this reducing to zero normal stresses) and the shear action of keys should not be allowed for. Thus for concrete gravity dams two dimensional assumptions are appropriate *but* it must be realised that the behaviour of the real structure will reflect the three dimensional action and this must be considered when comparison of observed with calculated behaviour is made.

In *earth dams* vertical joints do not exist and the action is obviously more monolithic even though cracks may open up locally. Here, once again, it is recommended that for the main transverse action a cross section only be considered. However now some attention should be given to the pos-

grés de liberté. Les chiffres correspondants pour les éléments paraboliques isoparamétriques sont : pour le calcul bidimensionnel 100 nœuds et 200 degrés de liberté et pour le calcul tridimensionnel (par exemple) : $6 \times 300 \times 3 = 3\,600$ degrés de liberté. Cet exemple fait ressortir la nécessité de l'utilisation des éléments isoparamétriques et l'augmentation du prix dans le cas du calcul tridimensionnel.

Quelle est la précision de l'approximation bidimensionnelle? Cette précision, est-elle acceptable? Pour le barrage-poids rectiligne, on adopte souvent l'hypothèse du non-clavage des joints. Ainsi dans ce cas, l'hypothèse bidimensionnelle semble acceptable en ce qui concerne les charges dues à la pesanteur. Par contre, la charge de l'eau s'applique contre un ouvrage rendu monolithique par les clavages et les injections. Dans ce cas, l'action se développera dans les trois dimensions (sauf pour les barrages très longs). Une étude récente basée sur l'hypothèse d'une action homogène et un comportement tridimensionnel est présentée ailleurs (54); certains résultats obtenus sont groupés dans la figure 8.

Il semble que l'action tridimensionnelle modifie nettement les contraintes *dans le plan du profil* — il en résulte généralement une réduction de la valeur de celles-ci. Faut-il tenir compte de cette action tridimensionnelle dans les calculs? A notre avis, cette prise en compte n'est ni nécessaire ni souhaitable. En effet, le retrait (ou les effets thermiques) peut ouvrir les joints, réduisant à zéro la contrainte normale et il ne faut donc pas tenir compte de la résistance au cisaillement des encastremets. Ainsi, pour les barrages-poids en béton, l'hypothèse bidimensionnelle est convenable, *mais* il ne faut pas oublier que le comportement de l'ouvrage réel traduira l'action tridimensionnelle. Il faut tenir compte de ce fait lors de l'étude comparative des résultats de calcul et le comportement observé.

Pour les digues, il n'y a pas de joints verticaux. L'action est évidemment plus monolithique (malgré la possibilité d'une fissuration locale). Là encore, il est recommandé pour l'étude des charges amont-aval, d'analyser seulement une section plane transversale. Néanmoins il est bon d'envisager

sibility of development of tensile stresses in the cross section and possible cracking under gravity action alone. Here another two dimensional idealization, now in the axial direction, has been proved quite effective when analysing such gravity loading (55, 56) (Fig. 9). Eisenstein (57) and others have compared full three-dimension analysis *for such loading* and found that reasonable agreement with two dimensional assumptions exists. Clearly it is possible to use effectively different idealizations for different loading conditions and here the cases illustrated show some possibility of using two mutually perpendicular two-dimensional assumptions.

An interesting problem of similar successive approximation arises in *buttress dams*. Here it is customary (and usually reasonably accurate) to use a two-dimensional, plane stress, approximation to obtain stresses in the elevation plane. Once these are obtained a slice perpendicular to the buttress head is used to study the stress distribution in the plane of the buttress. Comparison of results of such two stage, two dimensional analysis with a full three-dimensional analysis (here based on elastic assumptions) is now shown in figure 10 and *justifies fully the process* (58). It is of interest to note that stresses in each of the planes enter as important factors into design considerations.

Many other situations exist where approximations of two-dimensional kind are tenable. Figure 11 shows an early analysis of a gravity dam with spillway gates where similar assumptions have been made. Providing the engineer understands the limitation of such approximation he is well entitled to introduce them.

B.2.2. Arch dams – shell or solid?

When we are concerned with arch dams – whether of single or multiple kind, two dimensionality assumptions of the kind discussed earlier are no longer tenable; however if the section is reasonably thin as shown in

la possibilité de tractions dans cette section plane et d'une fissuration éventuelle sous l'action du seul poids propre. Pour l'étude des charges dues à la pesanteur, on a essayé avec un certain succès une autre approximation bidimensionnelle, cette fois-ci dans le sens longitudinal (55, 56) (Fig. 9). Certains, dont Eisenstein (57) ont opéré la comparaison avec l'analyse tridimensionnelle pour les charges dues au poids. Il apparaît que les deux techniques donnent sensiblement le même résultat. Il est donc évident que l'on peut utiliser des modèles très différents pour l'étude des différents types de charge. Dans le cas présenté ci-dessus, on voit la possibilité d'adopter deux hypothèses bidimensionnelles orthogonales.

De même, les barrages à contreforts posent un problème intéressant d'approximations par différentes sections planes. Normalement, il est acceptable d'étudier un champ de contraintes bidimensionnelles. On obtient ainsi les valeurs des contraintes dans le plan de l'élévation de l'ouvrage. Ensuite, on passe à une tranche perpendiculaire à la tête du contrefort pour déterminer la répartition des contraintes dans le profil (plan du contrefort). La comparaison des résultats obtenus par une étude comportant deux calculs bidimensionnels et par le calcul tridimensionnel complet est donnée figure 10. *Elle justifie complètement la technique bidimensionnelle* (58). Il est intéressant de noter que les contraintes dans les deux plans constituent d'importantes données de base pour le projet des ouvrages.

Il existe bien d'autres cas où l'approximation bidimensionnelle reste valable. La figure 11 montre le vieux calcul d'un barrage-poids à déversoir à vannes, pour lequel on avait adopté des hypothèses de ce genre. Sous réserve de bien saisir les limitations de cette approximation, il est tout à fait justifié de s'en servir.

B.2.2. Les barrages-voûtes – des coques ou des ouvrages épais?

Dans le cas des barrages-voûtes (voûtes simples ou multiples), l'hypothèse bidimensionnelle ci-dessus n'est plus valable. Pour les sections relativement minces (Fig. 12), on est tenté d'assimiler l'ouvrage à une

structures of figure 12 there is a temptation to use shell type approximations which reduce the solid to a "surface" structure incorporating all or some assumptions of the Kirchhoff type (plane sections remaining plane and normality of these sections to the middle plane being preserved).

Studies of the Arch dam committee of the Inst. of Civ. Eng. (59) show that even for quite thick arch dams the general distribution of stresses and deflections obtained by such assumptions (even with neglect of shear deformations in shell analysis) gives very close results to those of full three-dimensional analysis (except at points of three-dimensional singularities such as are liable to occur at the foundation junction).

On the other hand the cost saving of using a shell approximation as compared with a full three-dimensional analysis utilising a single layer of parabolic elements across the thickness is negligible. As the foundation is usually modelled by some three-dimensional elements (unless Vögt type assumptions are included) and as frequently some fairly *solid* sections of a dam need a full three dimensional representation, shell type analysis programs need to have a transition from solid to shell type elements incorporated. This difficulty can be overcome by sophisticated software but it is the authors opinion that for most dam "shells" the use of full three-dimensional analysis has to be recommended as a general practice.

Figure 13 shows a typical mesh subdivision and stress results for a typical arch dam obtained using standard parabolic type elements.

B.2.3. Extent of foundation analysed

This subject was already briefly discussed in the previous section and we simply reiterate that it is a reasonable practice in both three and two-dimensional approximation to include a section of the foundation in the analysis, and to specify displacements as zero at a fixed distance. The fact that two dimensionality is only an approximation makes this approach realistic and the difficulty of infinite deformation of a half space is thus avoided. It may reasonably be argued

coque mince, le réduisant ainsi à une surface obéissant à certaines hypothèses (ou toutes) du genre de celles de Kirchhoff (les sections planes restent planes — celles-ci restent toujours normales au plan médian).

Les recherches du Comité sur les barrages-voûtes de l'Institution britannique des ingénieurs civils (59) démontrent que, même pour les voûtes assez épaisses, la répartition globale des contraintes et des déformations obtenue avec de telles hypothèses est comparable (même en négligeant les déformations au cisaillement) à celle obtenue par le calcul tridimensionnel (sauf au droit des particularités tridimensionnelles, par exemple, au contact béton-rocher).

Mais d'un autre côté, l'économie de calcul en coque mince par rapport au calcul tridimensionnel à une rangée d'éléments paraboliques dans l'épaisseur, est négligeable. La fondation étant habituellement reproduite par quelques éléments tridimensionnels (sauf emploi d'hypothèses du type Vögt), et certaines zones *épaisses* du barrage souvent exigeant un modèle tridimensionnel, les programmes de calcul en coque doivent incorporer un moyen de liaison entre les éléments coques et les éléments « solides ». Des programmes très complexes peuvent résoudre ce problème mais nous pensons que le calcul tridimensionnel complet est à préconiser en général pour la plupart des barrages « coques ».

La figure 13 est un exemple de maillage et du champ de contraintes obtenu, pour le calcul d'un barrage-voûté à l'aide d'éléments paraboliques banalisés.

B.2.3. Étendue de la fondation

On a déjà abordé ce sujet au paragraphe précédent. On se contente donc de répéter qu'il est acceptable, pour le calcul bi- et tridimensionnel, d'inclure une portion limitée de la fondation en supposant que les déplacements deviennent nuls à une certaine distance donnée. L'approximation propre au calcul bidimensionnel rend cette approche assez réaliste et l'on évite ainsi les problèmes qui seraient posés par les déformations finies d'un demi espace. On peut jus-

that use of Vögt type assumptions is reasonable especially as foundation deformability constants are uncertain. The optimal way of dealing with foundation is still a matter of conjecture but some finite element subdivision of this is useful for assessment of rock stresses.

tifier l'emploi d'hypothèses du type Vögt, d'autant plus que les coefficients de déformabilité de la fondation ne peuvent être chiffrés avec précision. On n'est toujours pas certain de la meilleure façon de traiter la fondation, mais on peut utilement diviser celle-ci à l'aide d'un certain nombre d'éléments finis afin d'en apprécier l'état de contrainte.

B.3. NATURE OF LOADS

B.3. LA NATURE DES CHARGES

B.3.1. Porous nature of material — total versus effective stresses and water load

B.3.1. La porosité — contraintes effectives totales, la charge hydrostatique

As in all dams gravity and water effects are of primary importance it is difficult to discuss loading assumptions without some reference to the material characteristics. There is a common factor between all materials used in dam construction, i.e. concrete, rock and soil. All are porous and in all a water pressure is liable to develop through percolation in the interstitial spaces however small these may be. This fact is generally accepted by soil mechanics but is not fully understood or accepted in the context of concrete structures. Nevertheless *many fracture and deformation tests done on concrete have demonstrated that the "effective stress", σ^e , defined in terms of the total stress σ and pore pressure p as :*

Quel que soit le type de barrage à étudier, l'effet du poids propre et de l'eau est de première importance. Il est donc malaisé d'étudier les hypothèses de charges sans tenir compte au préalable des caractéristiques des matériaux en jeu. Tous les matériaux faisant partie des barrages (béton, rocher, terre) partagent une même caractéristique — la porosité. Ainsi, il y a toujours un risque de pressions internes par suite de la percolation de l'eau dans les vides interstitiels aussi petits soient ils. Ce fait est généralement admis par les mécaniciens du sol, mais il est mal compris (ou accepté) dans le domaine des ouvrages en béton. Cependant, *un grand nombre d'essais (de fracture, de déformation) ont démontré que la « contrainte effective » σ^e , définie par rapport à la contrainte totale σ et à la pression interstitielle p par la relation :*

$$\sigma^e = \sigma + mp \quad m^T = [1, T, 1, 0, 0, 0] \quad [9]$$

is the determining factor in the behaviour of concrete in ultimate conditions and that presumably this stress is the best quantity in terms of which the constitutive relations can be written.

est le facteur déterminant pour le comportement extrême du béton; ainsi, il semble que c'est là le meilleur terme par rapport auquel on peut définir les relations constitutives.

If we accept the effective stress concept generally then a unified approach to all problems involving rock, soil and concrete, is provided. The crucial question is obviously that of the magnitude of pore pressure to be assumed and here an obvious way out is provided for those who feel (with some evidence of experiment behind them) that under semi-saturated conditions the influence of pore pressure can be disregarded. If this is the

Admettant l'influence globale du concept de la contrainte effective, on débouche sur une approche uniforme pour l'ensemble des problèmes faisant intervenir le rocher, la terre ou le béton. La question clé est évidemment la valeur à adopter pour caractériser la pression interstitielle, et pour ceux qui (appuyés par certains résultats expérimentaux) pensent que, dans des conditions de semi-saturation, on peut négliger l'influ-

case it is simply necessary to assume the pore pressure as zero.

In general problems of soil mechanics three classical problems are distinguished :

a) very rapid loading when p depends itself on volumetric strain :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz};$$

b) very slow loading when the distribution of p is determinable by an independant seepage type solution;
and finally

c) a coupled phase during which transition (from) (a) to (b) occurs and where rather complex time dependent problems have to be solved.

For design purposes of earth dams it is useful to consider the two limiting stages (a) and (b) and bracket the solution by these. It is suggested that in concrete structures this type of approach may also be profitable but here using a bracketing between $p = 0$ and probable full uplift pressure assumption.

How is the pore pressure introduced into analysis? In the classical procedure it is customary to rewrite the total differential equation of equilibrium by substituting equation [9], and to find that the pore water pressures result in a body force term :

$$\underline{b} = - \text{grad}_p, \quad [10]$$

if equilibrium in terms of effective stresses is considered. This process needs the specification of boundary tractions in "effective" terms and is slightly complex in its application.

A somewhat simpler procedure becomes evident if the integral equilibrium equation [3] is rewritten in effective stress term by substitution of equation [9]. We have thus :

$$\int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{t} dl \equiv \\ \equiv \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}^e d\Omega + \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{m} p d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{t} dl = 0. \quad [11]$$

Immediately it is evident that the analysis can be conducted in precisely the same manner as with total stresses (i.e. with total

ence de la pression interstitielle, le moyen pour éviter ce problème est évident – dans ce cas, on pose simplement que cette pression est égale à zéro.

Dans la démarche de la mécanique des sols, on distingue trois problèmes classiques :

a) la montée en charge très rapide, lorsque la valeur de p dépend des déformations volumétriques :

b) la montée en charge très lente; on peut déterminer la répartition de p à l'aide d'un calcul indépendant de percolation; et finalement

c) une phase transitoire entre (a) et (b) ci-dessus; il s'agit là de problèmes complexes variant en fonction du temps.

En ce qui concerne le projet d'un barrage en terre, on peut tenir compte des deux étapes limites (a) et (b) afin de trouver la solution par une fourchette. Ce genre de solution serait peut-être valable également pour les ouvrages en béton, la fourchette étant comprise entre $p = 0$ et la valeur maximale adoptée pour les sous pressions.

Comment introduire la pression interstitielle dans le calcul? Selon la technique classique, on ré-écrit l'équation différentielle d'équilibre à l'aide de l'équation [9], et ainsi, les pressions interstitielles donnent un terme de force volumique :

lorsque l'on considère l'équilibre par rapport aux contraintes effectives. Mais cette technique exige de définir les contraintes aux limites en termes de contraintes effectives, et l'application est quelque peu compliquée.

On obtient une technique un peu plus simple en ré-écrivant l'équation [3] en fonction de la contrainte effective, en substituant l'équation [9]. Ainsi, on a :

Il devient évident tout de suite que l'on peut alors procéder rigoureusement de la même façon que dans le cas des contraintes

boundary forces included) and that the pore pressures effect is simply to provide an additional set of nodal forces defined as :

$$- \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{m} p \, d\Omega \quad [12]$$

A very slight modification of standard programs allows this change to be made and it is recommended that this be used in effective stress analysis.

To clarify matters if we are considering the analysis of a dam shown in figure 14 when we specify the forces due to the water pressure we :

- 1) Apply external water surface load precisely in the same manner as if the body were impermeable and compute appropriate nodal forces;
- 2) Compute additional nodal forces by expression [12] for an assumed pore pressure distribution.

This process allows a complete separation of *uplift effects* from the external load and is computationally advantageous. It should be noted that discontinuous pressure fields can be assumed due to the form of the integral [12]. The assumption of the pore pressure distribution can follow either a suitable seepage type solution or any other usual "uplift" distribution assumption.

It is sometimes argued that pore pressures do not penetrate into the body of the concrete but exist only in infinitesimal cracks. In figure 15 we show such a crack inside an element and it is clear that if the above formulation is followed the effect of the crack pore pressure on the displacement analysis is zero (as the finite pressure is integrated over a zero area). This indeed is perfectly true but it will be noted that the effective stresses will now be different on the interface and inside the element. While inside the element the effective and total stresses will be indistinguishable, on the crack interface effective compressive stresses will be reduced by the amount of the pore pressure. Unless the normal stresses on the crack become tensile no separation will take place and we can conclude that the concrete structure in such circumstances

totales (c'est-à-dire, avec incorporation des forces aux limites); en effet, les pressions interstitielles ne font qu'introduire un groupe supplémentaire de forces nodales :

Une très légère modification des programmes permet de tenir compte de cette nouveauté. Ainsi, l'emploi de cette technique est recommandé pour le calcul des contraintes effectives.

On peut résumer ainsi. Dans le cas du barrage de la figure 14, pour fixer les forces dues à la pression d'eau :

- 1) Pour l'application de la charge hydrostatique, on assimile la surface à un milieu imperméable pour calculer ensuite les forces correspondantes aux nœuds.
- 2) Ensuite on calcule les forces nodales supplémentaires à l'aide de l'équation [12], en adaptant une hypothèse quelconque pour la répartition des pressions interstitielles.

Cette méthodologie présente l'avantage d'une séparation complète des *effets des sous-pressions* et de la charge externe. Il est à noter que la forme de l'intégrale [12] permet la prise en compte de champs de pressions discontinus. Pour la répartition des pressions interstitielles, on peut adopter un diagramme classique de « percolation » ou de « sous-pressions ».

Certains objectent que les pressions interstitielles ne pénètrent pas dans la masse du béton, étant limitées aux fissures infimes. La figure 15 montre une telle fissure dans un élément. Il est clair que, pour la méthodologie ci-dessus, l'influence de la pression régnant à l'intérieur de la fissure dans le calcul des déplacements est nulle (intégration d'une pression finie sur une surface nulle). Cette observation n'est pas discutée. Mais il faut noter que dans ce cas, les contraintes effectives sont modifiées, à la fois sur l'interface de l'élément et à l'intérieur de celui-ci. En effet, s'il est impossible de distinguer la contrainte effective et la contrainte totale à l'intérieur de l'élément, par contre, sur l'interface de la fissure, les contraintes effectives de compression seront réduites de la valeur de la pression interstitielle. Tant que les contraintes normales

could have been analysed as impermeable with no effect of the pore pressure in the deformation pattern. The check on possible crack opening is therefore precisely that suggested over a hundred years ago by Levy (60) and it is of interest how his arguments can be justified in the modern context.

In non linear crack type analysis which we shall mention later it is usual to assume a distribution of a crack pattern and assign permeable material properties to a wide zone in the element. The author prefers therefore to make an allowance for possible pore pressures distributed throughout *a priori*.

The final point concerning water pressure effects on which some guidance is necessary is that of the water load applied to the foundation (t_f in figure 14). Clearly if the foundation is impermeable (and $p = 0$ inside) this surface load will cause compression of the foundation. If we allow for a hydrostatic pore pressure distribution inside the foundation the body forces caused by this as given by equation [12] will all be in the upward direction and the net effect will in fact produce an expansion or an upward movement of the foundation. As in all analysis we are concerned with *changes* from an initial condition (which in the case shown may have already given a hydrostatic distribution prior to the dam construction in the formulation but with zero pressure at surface it will be found that the foundation movement tendency is nullified. It is often therefore desirable to disregard both the external and internal water pressures in the foundation if other information is lacking.

B.3.2. Gravity loads and initial stresses

Here it is not the nature of the load but the sequence in which it is applied which needs to be considered.

Clearly in the foundation of a dam the gravity load has existed since time immemo-

agissant sur la fissure ne sont pas des tractions, la séparation est interdite. On peut donc conclure que l'on aurait pu aussi bien assimiler l'ouvrage en béton à un corps imperméable, en négligeant l'influence de la pression interstitielle sur le comportement en déformation. Ainsi, la règle à adopter pour déterminer si l'ouverture des fissures est possible est exactement celle proposée par Levy (60) il y a plus d'un siècle. Il est intéressant de noter comment les arguments de cet homme peuvent être justifiés par les idées modernes.

Pour le calcul non linéaire des fissures (voir plus loin), on a l'habitude de poser une certaine répartition des fissures, en dotant une large zone de l'élément de caractéristiques de perméabilité. Ainsi, nous préférons tenir compte des pressions interstitielles possibles dont la répartition est posé *a priori*.

Enfin, il faut dire un mot sur la charge hydrostatique agissant sur la fondation (t_f dans la figure 14). Il est évident que pour une fondation étanche ($p = 0$ à l'intérieur de la masse), cette charge appliquée contre la surface entraîne une compression du rocher. Par contre, supposant, dans le massif, une répartition hydrostatique des pressions interstitielles, les forces volumiques qui en résultent (données par l'équation [12]) seront toutes dirigées vers le haut. Le résultat est donc une dilatation, ou un déplacement ascensionnel du massif. L'objectif des calculs est la détermination des *modifications* qui interviennent par rapport à la condition initiale. Ainsi, dans le cas présent, il est possible qu'une répartition hydrostatique des pressions existât avant la réalisation du barrage, la pression superficielle étant toutefois nulle. On peut donc trouver que cette tendance de déplacement du massif est parfaitement compensée. Il est souhaitable d'éliminer dans le calcul les pressions interne et externe en l'absence d'informations complètes sur la fondation.

B.3.2. Charges dues au poids – Contraintes initiales

Dans ce cas, il ne s'agit pas de la nature des efforts, mais leur application échelonnée dans le temps.

Pour le massif rocheux de fondation d'un barrage, il est évident que la charge due au

rial and has established a system of initial stresses. Thus for analysis purposes gravity loads should never be applied to the foundation but it is important to add the effect of the initial stresses to the additional load stresses computed especially if inelastic (non linear) properties of the foundation are to be considered. In horizontal, flat, foundations it is an easy matter to approximate the initial stresses by assuming (or measuring) the value of the horizontal stress component only (Fig. 16 a), vertical ones simply balance the weight of overburden. In a real valley where full three dimensional conditions are taken into account the initial stress system cannot be of such a simple form by equilibrium considerations alone. Here a gravity analysis of the foundation structure may be on occasion an advisable preliminary just to determine reasonable and equilibrating initial stress conditions (Fig. 16 b).

Whether the dam is of concrete, rock or soil invariably gravity exists during the construction which proceeds layer by layer. Such construction can be reflected in the analysis but it is tedious and expensive. Many investigations into the importance of following the construction sequence in analysis have been conducted and here we summarize some practical findings.

1) *If a two dimensional idealization of a gravity (or buttress) dam is taken in the cross section plane then the difference between application of gravity to the whole structure or to a sequence of layers is insignificant as far as stresses are concerned (61, 62). This indeed is true even in earth dams where substantial material non linearity has to be taken into account and a recent investigation taken right through to collapse (63) indicates the insensitivity of the stress distribution to the loading sequence.*

It is however obvious that deformations due to gravity are going to be affected very seriously by the sequence of construction. In concrete dams this problem is of no consequence and it is recommended that the procedure of "one shot" gravity applica-

tion exists depuis toujours créant un champ de contraintes naturelles initiales. Ainsi, dans le calcul, on ne doit pas introduire le poids propre. Mais il est nécessaire d'ajouter, aux contraintes appliquées par l'ouvrage, les contraintes initiales, d'autant plus que l'on étudie le comportement inélastique (non linéaire) du massif. Pour les massifs horizontaux et plats, il est facile de caractériser approximativement l'état de contrainte initial en estimant (ou en mesurant) la valeur de la seule composante horizontale (Fig. 16 a). En effet, la composante verticale sera égale au poids de la couverture. Par contre, pour une vallée réelle où l'on doit tenir compte de la forme dans l'espace, on ne peut adopter un modèle aussi simple, basé uniquement sur les conditions d'équilibre. Dans ce cas, le calcul préliminaire des efforts dus au poids propre de la fondation peut parfois s'avérer souhaitable afin, de rechercher l'état de contraintes initial qui soit réaliste et assure l'équilibre (Fig. 16 b).

Pour tous les barrages (béton, enrochement, terre), le poids propre intervient toujours à mesure que l'ouvrage s'élève (levées de béton, couches de remblais). On sait reproduire cette séquence, mais le calcul est long et onéreux. On a souvent étudié le problème de la nécessité de suivre le comportement en cours de réalisation; nous pouvons résumer les résultats de ces études ainsi :

1) *Pour un profil bidimensionnel d'un barrage-poids (ou à contreforts), pour les contraintes, l'écart entre la méthode globale et celle reproduisant la montée de l'ouvrage est négligeable (61, 62). En outre il en est de même pour les digues, malgré la prise en compte de la non-linéarité du comportement des matériaux; en effet, une étude récente (63) poussée jusqu'à la rupture démontre l'insensibilité du champ de contraintes à la séquence de mise en charge.*

Par contre, il est évident que les déformations dues au poids propre sont très dépendantes de la séquence de construction. Ce problème est sans importance pour les barrages en béton; on préconise donc la méthode globale dans le calcul bidimen-

tion to the whole structure can safely be adopted for two dimensional analysis. In earth dams it is usually desirable to follow through the construction deformation sequence and here it has been found that 4-6 layer subdivision generally is adequate (64).

2) *In a full three dimensional analysis the effects of layered construction may be more serious.* In earth dams with steep valley sides which are stiff relative to the earth fill, the difference in stress distribution *in axial direction* between "one shot" gravity application and layered, sequential, loading is significant. Even if an axial, two-dimensional model is used (65) (e.g. Fig. 9), it is advisable to follow a layer sequence (about 8-10 layers are recommended here by Eisenstein) (56, 65).

In *arch dams* the situation is different, here invariably joints exist and the "hang up" stresses are not serious. In principle, analysis of such dams for gravity loads should be carried out following roughly the construction sequence and noting that as long as the joints remain open a single "one shot" two dimensional analysis suffices. However, as arch stresses due to application of gravity are not large in dams where overhangs are limited and as in the case of overhanging sections lower joints are grouted before these are built, it is a relatively reasonable approximation to apply gravity loads to a monolithic arch dam at least in preliminary design (Fig 17).

B.3.3. Thermal (and shrinkage) stresses

The inclusion of initial strains due to any known temperature pattern presents no difficulties in analysis. The temperature distribution itself can often be conveniently calculated with the same finite element mesh as that used for stress analysis — but simplified distribution are reasonable to assume for long period temperature states. For such long term temperatures there is a significant movement of the whole structure and in the finite element analysis significant thermal "forces" are induced.

sionnel. Pour les digues, il est généralement souhaitable de suivre la séquence des déformations pendant les travaux. Normalement, 4 à 6 tranches sont suffisantes (64).

2) *Pour un calcul tridimensionnel, l'effet de la construction peut être plus significatif.* Pour une digue construite dans une vallée encaissée dont les flancs sont raides par rapport à la souplesse du remblai, on trouve une nette différence dans les résultats des méthodes globales et par phases, pour la répartition des contraintes *dans le sens axial*. Même pour un modèle axial bidimensionnel (65) (Fig. 9), un certain nombre de tranches (8 à 10 d'après Eisenstein) est souhaitable (56, 65).

Pour les *barrages-voûtes*, la situation est différente. Il y a des joints, et les contraintes dues à « l'accrochage » de l'ouvrage sur les rives sont négligeables. En principe, le calcul des charges dues au poids propre devrait suivre plus ou moins la séquence des travaux, mais il convient de noter que, tant que les joints restent ouverts, le calcul bidimensionnel « global » est suffisant. Cependant, pour les voûtes sans surplombs importants, les efforts d'arc dus au poids propre sont limités, et d'autre part, les joints inférieurs sont injectés avant la réalisation des parties en surplomb; ainsi, il est acceptable de prendre, pour le calcul des charges dues au poids propre, une voûte supposée monolithique (du moins au stade de l'avant-projet) (Fig. 17).

B.3.3. Efforts thermiques et de retrait

Il est facile d'introduire dans le calcul les déformations initiales dues aux conditions thermiques connues. On peut souvent calculer, sans difficulté, la répartition même des températures à l'aide du même maillage d'éléments finis que celui utilisé pour le calcul des contraintes. Cependant, pour les conditions thermiques « permanentes », on peut adopter, pour cette répartition une hypothèse simplificatrice. Pour de telles conditions thermiques permanentes, on constate un important déplacement de l'ensemble de l'ouvrage; il en résulte, dans le calcul par éléments finis, des « forces » thermiques importantes.

On the other hand when short period temperature variations are considered a transient state of change occurs only in a narrow surface layer and the "thermal forces" are insignificant. Such short term temperature fluctuations introduce very high – full restraint – stresses in the surface of the structure but very little overall movement. Some idea of the depth of penetration of temperature distribution for diurnal, weekly and yearly cycles of temperature may be gained from figure 18 – and it will be readily appreciated that the daily temperature cycles are resisted by only a few inches of the surface skin, but the annual cycles will give an almost steady state temperature amplitude distribution in dams of 2 to 4 metres thickness (66).

Clearly the temperature stresses will cause very high compressions or tensions in the concrete and the magnitude of such stresses can be in excess of the load stresses. It has been argued that these stresses are in fact overestimated as inevitably cracking would have to occur. Research is obviously needed to establish appropriate expansion coefficients for both short and long term temperature effects but the mere fact that severe cracking is not observed must not lead us to the conclusion that these high stresses do not exist. It is rather a question of the *criteria* used in their interpretation which will have to be discussed.

In passing we should note here that one possible reason for the lack of significant cracking near the surface of the concrete due to diurnal cycles may be similar to the effect noted when considering tensile failure under pure tension and in bending. The latter invariably shows a greater tensile resistance which in recent years has been explained by a statistically smaller chance of failure in the smaller highly stressed regions.

B.3.4. Other static loads

Texts usually discuss the presence of silt and ice loading as well as statically equiva-

En revanche, pour les variations rapides de température, on constate une condition transitoire qui n'affecte qu'une mince couche superficielle; dans ce cas les « forces thermiques » sont peu importantes. Ces variations rapides entraînent des contraintes de valeur très élevée (encastrement complet) à la surface de l'ouvrage mais les déplacements de l'ensemble sont faibles. La figure 18 présente un exemple des gradients thermiques pour différents cycles (journaliers, hebdomadaires, annuels). On voit que une couche superficielle de seulement quelques centimètres est affectée par le cycle journalier, tandis que le cycle annuel pénètre bien plus profondément (par exemple, pour un barrage de 2 à 4 m d'épaisseur, le gradient est assimilable à celui résultant d'un régime thermique permanent) (66).

Il est évident que ces contraintes thermiques entraînent, dans le béton, des contraintes (compressions, tractions) de valeur très élevée – celles-ci peuvent dépasser la valeur des contraintes dues aux charges appliquées. On a objecté que ces efforts thermiques sont surestimés; dans le cas contraire, la fissuration serait inévitable. Il est évident qu'il faut entreprendre des recherches pour déterminer les coefficients de dilatation pour les effets thermiques à court et à long terme – mais il n'en reste pas moins vrai que l'absence de fissuration observée doit nous conduire à conclure que les valeurs élevées trouvées par le calcul des effets thermiques n'existent pas dans la réalité. Il faudrait donc étudier plutôt les *critères* d'interprétation à adopter.

On peut noter ici une explication possible de l'absence de fissuration superficielle importante du béton lors de cycles journaliers de variation de température. Il s'agit du phénomène observé au cours des essais de traction simple d'une part, et de flexion d'autre part. En effet, on constate une résistance à la traction plus élevée dans le dernier cas que dans le premier. Depuis quelques années déjà, on explique ce phénomène par une probabilité de rupture plus faible en flexion, puisque la zone de fortes contraintes est moins importante.

B.3.4. Diverses charges statiques

Les documents publiés traitent généralement des charges dues aux dépôts solides

lent earthquake load effects. From the analysis viewpoint the first two present no special problems while in the last one the only difficulty is one of specifying suitable magnitude. This matter will be discussed in Section C.

B.4. MATERIAL PROPERTIES AND CRITERIA FOR INTERPRETATION OF STRESS ANALYSIS RESULTS

B.4.1. General - Difference in treatment of earth and concrete

As we have remarked already it is possible to take into account for analysis purposes any reasonably specified constitutive relations (67-70). The questions to which this section is addressed is limited to defining the *minimum need* for inclusion of non-linearity in design and to the interpretation of results of analysis in terms of safety and performance.

Up to this time we have emphasised the essential unity of approach to dam analysis irrespective whether these are constructed of soil, rock or concrete. In this section it becomes advisable to separate the discussion. The main reason for this is not the qualitative difference of behaviour patterns of these different materials but rather the quantitative values of various parameters which make the concrete and earth structures differ in their vulnerability to different modes of failure. Earth, rockfill, and even fissured rock are materials whose cohesion is either non-existent or small, and structures designed in these materials take up a form which is governed by the compressive stress behaviour pattern. Considerable deformation capacity is exhibited by such structures and failure in a tensile – brittle mode is unlikely. Concrete and rock are on the other hand, strong cohesive materials which, without reinforcement, are very sensitive to tensile or brittle failure. The presence of tensile cracks may cause rapid collapse of some concrete structures but will in general have little effect on the behaviour of earth structures. Due to these differences we find that in general the *designer of concrete dams*

ou à la glace, et pour les séismes de la charge statique équivalente. Le calcul des deux premiers ne comporte aucune difficulté particulière. Pour le troisième, la seule difficulté concerne le choix d'une magnitude convenable. On abordera ce problème plus en détail chapitre C.

B.4. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX ET CRITÈRES D'INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS DES CALCULS

B.4.1. Généralités - Différentes techniques utilisées pour le remblai et le béton

Comme il est dit plus haut, on peut tenir compte, pour le calcul, d'équations constitutives quelconques, si elles sont convenablement écrites (67-70). Le but du présent paragraphe est de définir les *besoins minimaux* permettant la prise en compte de la non-linéarité, et d'examiner le problème de l'interprétation des résultats de calcul pour tirer des conclusions sur la sécurité et le comportement de l'ouvrage.

Jusqu'ici, on a souligné l'unité des approches, quelle que soit la méthode de réalisation du barrage (terre, enrochements, béton). Mais maintenant, il faut faire une distinction. La cause n'en est pas un écart qualitatif des comportements de ces différents matériaux, mais plutôt, les différentes valeurs à adopter pour les paramètres. C'est à cette différence quantitative que correspond la sensibilité de chaque type d'ouvrage à un mode de rupture préférentielle. Pour une catégorie de matériaux (terre, enrochements, et même massifs rocheux fissurés), la cohésion est nulle (ou très faible). Pour les ouvrages correspondants, le paramètre dominant est le comportement en compression. Ils présentent une très grande déformabilité, et la rupture en traction (rupture fragile) est improbable. Par contre, la deuxième catégorie (béton, matrice rocheuse) correspond à des matériaux à forte cohésion qui (en l'absence d'armatures ou d'autres renforcements) sont très sensibles à la rupture fragile ou en traction. La présence de fissuration due aux tractions peut entraîner très vite l'effondrement de certains ouvrages en béton mais reste généralement sans importance pour le comportement des ouvrages en

is concerned largely with brittleness of behaviour and development of cracks. Compressive failure possibility is considered in design mainly in the context of ultimate behaviour. Even here, from experience, the designer knows that collapse is mainly possible due to foundation (rock or soil) failure and that the "factor of safety" for concrete failure is large. His study of non linear deformations can therefore be relatively crude as these are more of academic than practical interest.

By contrast to this the *designer of an earth dam* will focus his attention on the deformation of the structure under working conditions – these deformations being generally several orders of magnitude larger than those of a concrete dam. As the material is much weaker the "factor of safety" against compressive failure is much smaller and even at working conditions much of the material may be in its "plastic" state. Such a "plastic" state would not be permissible under working stresses in concrete structures where deterioration would rapidly set in. With much wider sections of earth dams used the tensile zones are in general limited and a considerable amount of "healing" is permissible.

Clearly thus the earth dam designer will be interested in full non-linearity of material description while the concrete designer will need to follow mainly the brittle (tensile) behaviour possibilities.

It is tempting to conjecture that a single approach, formulation and indeed computer program, should be used for the analysis and design of both concrete and earth dams. The non linear constitutive descriptions of soil behaviour are today of such a general kind that, by a mere change of parameters, these can well describe the non linear behaviour of concrete or rock (71, 72, 73, 74). When sufficient computer capacity becomes available and the cost of computation decreases appreciably such non linear studies may become standard. At the present stage however

terre. Les différences qui en résultent au niveau de la conception des ouvrages sont que pour *les barrages en béton*, on étudie surtout la fragilité et la fissuration. La possibilité d'une rupture en compression n'intervient que dans l'étude de la stabilité limite – et même dans ce cas, l'expérience montre que la rupture proviendrait surtout d'une rupture de la fondation (rocher, terrains meubles), le « coefficient de sécurité » vis-à-vis d'une rupture du béton même étant surabondant. Ainsi, pour ces ouvrages, l'étude des déformations non linéaires peut rester relativement rudimentaire, car celle-ci n'a qu'un intérêt académique plutôt que pratique.

A l'inverse pour *les barrages en remblai* on porte surtout l'attention sur la déformation en service normal (la valeur des déformations est plusieurs fois plus grande que pour un barrage en béton). Les matériaux présentant une résistance mécanique bien inférieure à celle du béton, le « coefficient de sécurité » par rapport à la rupture en compression est bien plus faible. Même dans les conditions normales, le matériau peut travailler dans le domaine « plastique ». Cette condition « plastique » en service normal serait intolérable pour un ouvrage en béton, car il y aurait une détérioration rapide. Le profil des digues étant plus épais, les zones de traction sont généralement plus limitées et on peut admettre un taux élevé d'autoréparation des fissures.

Il est donc évident que l'on s'intéresse pour les barrages en remblai à un modèle à non-linéarité complète, tandis que, pour les barrages en béton, on étudie le comportement fragile (en traction).

Il est tentant de préconiser une approche, une formulation, voire un programme unique pour les deux cas. En effet, les équations de non-linéarité du comportement des remblais étant maintenant si banalisées qu'une simple modification au niveau des paramètres permet de les appliquer au béton ou au rocher (71-74). Et un jour, lorsqu'on disposera d'ordinateurs de capacité suffisante, et lorsque le prix du calcul informatique aura nettement diminué, ces études non linéaires pourraient être généralisées à tous les problèmes. Mais au stade actuel, une ap-

a more limited approach is necessary and we can recommend that :

a) full non linear behaviour studies be reserved for a study of earth dam projects of importance to determine displacements which are often large and at the same time obtain information on collapse;

b) for design of concrete structures where compressive stress re-distribution is insignificant under working load and where analysis indicates no tensile zones a purely elastic stress analysis will often suffice. However where tension is indicated a possibility of cracking must be considered and a limited non linear analysis will become essential. The next section will deal with this problem in more detail. The criterion for acceptance of maximum compressive stress may readily be based on the study of maximum principal stresses occurring in the structure and a suitable " safety factor ".

Perhaps some may feel that the similarity of non linear treatment of concrete and soil has been to some extent overstressed. This is only true in one respect and that is the question of the pore pressure action. In the general brief statement of the formulation we have concluded that the pore pressure enter the calculation as an independant factor. This in soils is only true under long term load conditions. For clays and other relatively impermeable materials a rapid application of load induces a certain pore pressure and these pressure terms are coupled. Such a parallel is not apparent in concrete structures where the compressibility of the solid skeleton is limited. However in principle at least the formulations are identical although the actual analysis may differ due to numerical factors.

B.4.2. Tensile zones and singularities in concrete structures. Cracking

When linear elastic assumptions are used in the analysis of concrete structures it is almost always found that tensions develop and it is customary to impose a limit on acceptable tensions. This was reasonably satisfactory as long as simple assumptions of behaviour of complex structures were used such as those implicit in say beam-arch ana-

proche plus limitée est nécessaire. On peut donc estimer que :

a) les études du comportement non linéaire doivent être réservées aux projets de grands barrages en remblai (calcul des déplacements souvent grands, précisions sur le mode de rupture);

b) le calcul purement élastique est suffisant pour l'analyse des contraintes des ouvrages en béton (adaptation aux compressions négligeables en service normal, absence de tensions). Cependant, en cas de tractions, il faut tenir compte d'une fissuration éventuelle; dans ce cas, le calcul non linéaire est indispensable (voir paragraphe suivant). Le critère d'acceptabilité de la compression maximale peut facilement être basé sur l'étude des contraintes principales maximales en tenant compte d'un « coefficient de sécurité ».

Certains penseront que l'on a trop insisté sur la similarité d'approche pour le calcul non linéaire du remblai et du béton. Mais la seule exagération concerne l'action des pressions interstitielles. Nous avons constaté (voir ci-dessus) que la pression interstitielle doit être introduite sous forme d'un terme indépendant, mais cette affirmation n'est valable, pour les remblais, qu'en régime de chargement permanent. Pour les matériaux relativement imperméables (notamment les argiles), la mise en charge rapide produit une certaine pression interstitielle – ainsi, ces termes de pression sont couplés. On n'observe pas ce phénomène de couplage dans les ouvrages en béton, la compressibilité de la structure du matériau étant limitée. Cependant, les formules sont identiques (en principe, au moins) malgré les différences éventuelles dans le calcul même, par suite des différents facteurs numériques.

B.4.2. Zones de tractions et particularités dans les ouvrages en béton.

Fissuration

Lors du calcul des ouvrages en béton à l'aide d'hypothèses d'élasticité linéaires, on trouve presque toujours des tensions; normalement, on fixe une limite admissible pour ces tensions. Cette façon de faire était assez satisfaisante tant que l'on adoptait, pour les ouvrages complexes, des hypothèses simplificatrices (par exemple assimilation des bar-

lysis of arch dams or a cantilever type analysis of gravity dams using linear stress distributions. Unfortunately a consequence of more precise analysis is the fact that large (theoretically infinite) stresses occur near singularities. Such singularities can be caused by real structural features such as sharp re-entrant corners near the foundation but may equally well be induced by local cracks undetected in the construction or caused by thermal actions in places where "smooth" stress flow occurs. In view of such large concentrations which are largely analysis dependant (as a finite mesh of finite elements will only give there an approximation which becomes better — i.e. yields progressively larger stress as the mesh is refined) is the specification of maximum tensile stress tenable?

The answer to this question is by no means simple. In a compressive singularity zone a small amount of plastic yield will, as is well known, limit the maximum stress values and a redistribution of stresses will occur. Such a redistribution does not occur to any appreciable extent in a tensile zone of a brittle material and fracture may occur. In machine components a fracture study is largely based on the use of energy concepts introduced by Griffiths and elaborated in terms of stress intensity factors (75). The critical value of such a stress intensity factor calculated for a particular singularity determines whether a crack will propagate. In principle it appears that similar criteria should be introduced into the design of massive concrete structures such as dams and that a detailed study of each possible singularity be made. In practice such an approach would be excessively complicated and would go against the common sense of a good designer who knows that in a well designed massive structure the crack should be able only to propagate for a limited distance until all tensions disappear and that the "cracked" structure should be safe with respect to cracking or other failure. Unless such an arrest of a crack becomes a possibility the structure is not absolutely safe and should not be permitted.

rages-voûtes à une poutre arquée, des barrages-poids à une console encastrée, répartition linéaire des contraintes). Malheureusement, le calcul plus fin indique, pour de tels modèles, des contraintes très élevées (en principe infinies) au droit des particularités. Ces singularités peuvent provenir soit de la géométrie (brusques changements de directions au contact de la fondation...), soit de fissures locales inaperçues, soit des effets thermiques dans les zones où le champ de contraintes est régulier. Compte tenu du fait que ces fortes concentrations résultent de la technique de calcul adoptée (un maillage régulier d'éléments finis ne donne que des résultats approximatifs dans ces zones, mais ceux-ci se précisent — c'est-à-dire les contraintes calculées augmentent en valeur — à mesure que le maillage devient plus fin), est-il valable de fixer un niveau maximal admissible pour les tractions?

La réponse est loin d'être simple. Au voisinage d'une particularité où il apparaît des compressions, on sait que la déformation plastique et l'adaptation limitent les efforts. Par contre, pour les zones en traction, il y a un risque de fissuration, et l'adaptation est faible pour un matériau fragile. Dans le domaine de l'étude des machines mécaniques, l'étude de la fracture est basée surtout sur la notion d'énergie introduite par Griffiths et ultérieurement mise au point pour tenir compte des taux de contrainte (75). La valeur critique, calculée de ce taux pour une particularité donnée, détermine si une fissure va s'ouvrir. En principe, il semble qu'un critère de taux de contrainte devrait être introduit dans le calcul des ouvrages massifs en béton, tels que les barrages, chaque particularité possible étant l'objet d'une étude détaillée. Dans la pratique, une telle approche serait excessivement compliquée et en outre, elle serait contraire au bon sens, car le projeteur sait bien que, dans un ouvrage massif convenablement conçu, d'une part une fissure ne peut s'ouvrir que sur une distance limitée, jusqu'à l'élimination des tensions, et d'autre part, que l'ouvrage fissuré ne comporte pas de risque de rupture par fissuration ou par tout autre mode. En effet, tant que l'arrêt de la fissure n'est pas possible, l'ouvrage ne présente pas de sécurité suffisante et doit être proscrit.

It is thus reasonable to assume that cracks may propagate with a zero stress intensity factor and to investigate all concrete structures using such an assumption. If the cracked structure is not showing excessive deformations or compressive overstress we can conclude that safety conditions are satisfied. The fact that in general a non zero tensile stress intensity will be needed to propagate the fracture is immaterial and simply provides a reserve of strength which prevents excessive cracking.

When using linear elasticity assumptions in the study of concrete dams an essential feature must be an inclusion of a possible non linear cracking mechanism into the analysis. In early finite element analyses of dams such cracks were inserted manually in tensile regions but today automatic computer programs allow such non-linearities to be treated. One device is the introduction of the so-called distributed, no tension, criterion (67) but other possibilities with cracking limited to joint lines are possible.

At this point it is perhaps appropriate to remark that it appears desirable to introduce possible cracks path *a priori* into the structure so that appropriate watertightness conditions can be looked after (76). The treatment of such preformed crack paths is identical to that of joints in rock or in concrete, and is well documented in literature (76 a, 76 b).

From what has been said it appears that we reject entirely the use of a maximum permissible tension stress criterion. This is certainly a correct inference as far as the safety of the structure is concerned. However in actual numerical analysis when optimisation of a shape of a dam is concerned we may find it desirable to use such a specified maximum tension for comparison purposes between alternative designs. This is now merely a device by which a design is controlled and must not be specified by a general code. There is however one exception; this concerns thermal stress behaviour. For such stresses we feel that it is reasonable to use a guiding value of a maximum tension in a general specified manner providing crack propagation will be limited.

On peut donc étudier tous les ouvrages en béton en supposant que les fissures se développent même pour un taux de travail nul. A condition que les déformations et les compressions de l'ouvrage soient acceptables, on peut conclure que les exigences de la sécurité sont satisfaites. La nécessité d'avoir un taux de travail en traction qui soit supérieur à zéro avant le développement des fissures est sans importance. Elle donne seulement une certaine marge de résistance contre la fissuration excessive.

En cas d'option de l'élasticité linéaire pour le calcul des barrages en béton, il est essentiel de prévoir un mécanisme éventuel de fissuration non linéaire. Dans les premiers calculs par éléments finis, on introduisait les fissures dans les zones en traction par une technique manuelle. Mais aujourd'hui, on peut en tenir compte automatiquement à l'aide des programmes d'ordinateurs. Parmi les techniques possibles, on peut citer le critère « de répartition à traction nulle » (67), ou celles dans lesquelles la fissuration est limitée aux lignes de joints.

Il convient de préciser l'intérêt d'introduire, dans l'ouvrage, les chemins de fissuration possibles, afin d'étudier les conditions d'étanchéité (76). La technique de traitement de ces chemins de fissuration pré-établis est identique à celle utilisée pour les joints (rocher, béton); les publications sur ce point sont abondantes (76 a, 76 b).

Il résulte des thèmes développés ci-dessus que nous rejetons absolument le critère des tractions maximales admissibles. Cette conclusion est indubitablement correcte en ce qui concerne la sécurité. Cependant, lors de la mise au point des formes optimales par calcul numérique, il est parfois souhaitable d'adopter ce critère pour l'étude comparative de plusieurs variantes possibles. Dans ce cas, ce critère n'est autre chose qu'un moyen d'appréciation — il ne doit pas être appliqué systématiquement. L'exception à cette règle concerne le comportement thermique. En effet, pour les contraintes thermiques, nous pensons qu'il est raisonnable d'adopter une valeur-guide des tensions maximales admissible, afin de limiter l'ouverture des fissures.

B.5. CONCLUDING REMARKS

This brief survey of the methodology and some of the problems posed in the interpretation of numerical analysis results is intended as a guide to the complexities involved. In the next section we shall deal with dynamic behaviour but many of the problems of judgement remain identical. The next section will therefore imply many of the statements already made here and is not considered to be an independent feature.

B.5. CONCLUSIONS

On a voulu que cette rapide revue de la méthodologie adoptée pour le calcul numérique des ouvrages et de certains problèmes d'interprétation des résultats serve de guide dans les problèmes rencontrés. Au chapitre suivant, nous passons au comportement dynamique, mais un grand nombre de problèmes resteront identiques. Ainsi, le chapitre suivant reprend implicitement certains points déjà développés. Il ne peut être considéré comme une note indépendante.

PART C

DYNAMIC ANALYSIS METHODS, PROBLEMS, CRITERIA

C.1. INTRODUCTION

Dynamic analysis of dams is synonymous with earthquake response analysis because the only type of dynamic loads considered in dam design are earthquake loads. It has been standard practice for many years to include seismic forces among the design load conditions in the design of all types of dams, whether rockfill, earth, concrete arch or concrete gravity structures. However, in the standard design procedures the seismic loads have been treated as equivalent static forces determined by multiplying an assumed acceleration value (seismic coefficient) by the mass of the structure plus an added mass contribution of the reservoir water (77, 78). Moreover, it has been assumed that only the horizontal upstream component of earthquake acceleration caused any significant forces, and the resulting horizontal seismic forces were combined with the other static loads acting on the structure to obtain the full design load condition.

This static representation of earthquake effects on dams is a considerable oversimplification because it completely ignores the dynamic response behavior of the structure. The seismic forces are evaluated as though the structure were rigid, but it actually is flexible and the accelerations resulting from its dynamic response may be several times greater than those which would act on a rigid structure. So long as the analysis of the dam was carried out by procedures which provided only a gross estimate of structural behavior, this equivalent static analysis pro-

PARTIE C

CALCUL DYNAMIQUE MÉTHODES, PROBLÈMES, CRITÈRES

C.1. INTRODUCTION

Le calcul dynamique des barrages est synonyme d'analyse du comportement sismique, car c'est le seul effet dynamique qu'il peut être amené à supporter. Depuis bien des années, on compte habituellement, parmi les cas de charge, les forces d'origine sismique mais on les introduit sous forme de charge statique équivalente obtenue par multiplication de la masse de l'ouvrage par le « coefficient sismique » (l'accélération), le produit étant majoré de la masse ajoutée par le volume d'eau stockée (77, 78). En outre, on a toujours supposé que seule la composante horizontale dirigée vers l'amont de la secousse ajoute des efforts importants. La force sismique ainsi obtenue est ajoutée aux autres efforts statiques pour trouver la charge totale agissant sur l'ouvrage.

La représentation statique des forces sismiques est une hypothèse excessivement simplificatrice, car elle élimine totalement la réponse dynamique de l'ouvrage. Les efforts sismiques sont évalués en supposant un ouvrage rigide mais dans la réalité, celui-ci est souple, et ainsi les accélérations résultant de sa réponse dynamique propre peuvent dépasser de plusieurs ordres de grandeur celles agissant sur un corps rigide. Tant que les barrages furent calculés par des méthodes ne fournissant qu'une estimation grossière de leur comportement mécanique,

cedure was adequate. However, when the finite element method was introduced for the static analysis of dams, making possible a much more detailed and reliable estimate of the stresses induced by a given set of loads, it became necessary to apply dynamic response analysis procedures in the treatment of earthquake effects so that the seismic stresses could be calculated with a precision equivalent to that associated with the static stresses. The purpose of this part of the paper is to describe the dynamic finite element method for analysis of the earthquake response of dams.

In principle, a dynamic response analysis may be looked upon merely as an extension of the static stress analysis procedure, requiring only the inclusion in the equations of equilibrium of additional dynamic forces resulting from the motion of the structure. Thus the dynamic equilibrium relationship expressed by equation 5 *a* includes the inertia forces associated with the acceleration vector, and the damping forces resulting from the velocity vector, in addition to the displacement dependent stiffness forces which characterize a static problem. However, the inclusion of these time-rate dependent forces in the equations of equilibrium converts them from a set of simultaneous algebraic equations to a set of simultaneous differential equations; hence the dynamic response analysis procedure differs considerably from, and requires significantly more effort than a static analysis of the same structure.

In this section, the standard dynamic finite element analysis procedure will be described first in its application to the seismic analysis of dams. Next, certain limitations and deficiencies of the standard method as applied to dams will be mentioned, and research directed toward overcoming some of these difficulties will be discussed. Finally the problem of establishing design criteria suitable for use with these refined analytical techniques will be reviewed.

C.2. STANDARD DYNAMIC ANALYSIS PROCEDURE

The earthquake response analysis of concrete dams generally is carried out by the

cette méthode statique resta suffisante. Mais dès l'application de la méthode des éléments finis pour le calcul statique des barrages, méthode qui fournit une estimation bien plus fine et sûre des contraintes produites par un cas de charge donné, alors il devint nécessaire d'adopter des techniques de calcul du comportement dynamique permettant d'obtenir, pour les efforts sismiques, la même précision que pour les efforts statiques. Le but de ce chapitre est de présenter la méthode dynamique des éléments finis dans l'étude du comportement sismique des barrages.

Dans son principe, on peut concevoir l'étude dynamique comme une extension du calcul statique, moyennant simplement l'introduction, dans l'équation d'équilibre, des forces dynamiques supplémentaires provoquées par le mouvement de l'ouvrage. Ainsi, la relation d'équilibre dynamique d'équation 5 *a* comprend outre les forces de raideur liées aux déplacements qui caractérisent le problème statique, les forces suivantes, forces d'inertie liées au vecteur accélération, forces d'amortissement qui résultent du vecteur de vitesse. Cependant, la prise en compte de ces forces fonction de temps, fait que les équations d'équilibre, initialement des équations simultanées algébriques, deviennent des équations simultanées différentielles. De ce fait, le calcul dynamique est très différent du calcul statique, et demande bien plus de travail.

On décrit dans le présent paragraphe la méthode fondamentale du calcul dynamique par éléments finis, d'abord dans l'application aux barrages. Ensuite, on passe aux limitations ou insuffisances de cette méthode et aux recherches entreprises pour les éliminer. Enfin, on examinera le problème de l'établissement de critères à utiliser lors de l'interprétation des résultats.

C.2. MÉTHODE FONDAMENTALE

L'étude du comportement sismique des barrages en béton est normalement effec-

standard dynamic finite element method. The basic steps in such an analysis are as follows :

1) idealization of the dam and an appropriate segment of the foundation rock as an assemblage of finite elements;

2) evaluation of the stiffness, damping, and mass properties of the elements, as well as the effective earthquake force input, to formulate the equations of motion;

3) evaluation of the vibration mode shapes of the dam-foundation system, and transformation of the equations of motion from the finite element coordinates to these modal coordinates;

4) calculation of the seismic response in each of the uncoupled modal coordinates, using either a response spectrum or a time-history description of the design earthquake, and then appropriately superposing the modal responses to obtain the total response.

Each step in this analysis procedure has been described extensively in previous publications (79,80) so only those factors which pertain specifically to the seismic response of dams will be discussed here.

In linear earthquake response analysis an alternative of *frequency domain* computation is possible. Here the response of the system to a series of selected frequencies is made and the total response is obtained by a Fourier synthesis of frequencies present in actual earthquakes. This process can be applied very efficiently by making use of fast Fourier transforms. It has the advantage of permitting the use of complex forms of damping (such as exist for instance with radiation damping) – these forms making the use of modal – superposition impracticable.

For non linear response studies and often for complex cases of linear response a direct step by step numerical integration of equations of motion presents the only alternative. Such computations are generally more costly but relatively simple to program (81, 82).

C.2.1. Finite element idealization

Essentially the same questions concerning the geometric idealization arise in the dyna-

tuée à l'aide de cette méthode. Les étapes sont les suivantes :

1) maillage du barrage et d'une partie de la fondation rocheuse;

2) évaluation des caractéristiques de raideur, d'amortissement et de masse des éléments finis, ainsi que de la force sismique à appliquer, afin d'écrire les équations de mouvement;

3) évaluation des formes des éléments du barrage et de sa fondation soumis aux vibrations. Transformation des équations de mouvement pour passer des coordonnées des éléments finis aux coordonnées nodales;

4) calcul de la réponse sismique selon chacune des coordonnées modales non couplées (à l'aide soit d'un spectre, soit de l'évolution du séisme en fonction du temps). Superposition des réponses modales afin d'obtenir la réponse totale.

Chacune de ces étapes est décrite en détail dans les publications (79, 80). On se bornera ici à examiner les parties s'appliquant au calcul des barrages.

Pour le calcul du comportement sismique à l'aide d'une hypothèse de linéarité, on peut aussi baser le calcul sur les *domaines de fréquences*. Dans ce cas, on étudie la réponse à l'ouvrage soumis à diverses fréquences, la réponse d'ensemble étant obtenue par série de Fourier des fréquences constatées dans les séismes réels. On améliore l'efficacité de cette technique en utilisant des transformations Fourier rapides. Cette technique présente l'avantage de permettre la prise en compte d'amortissements complexes (par exemple amortissement radial) qui rendent trop difficile la technique de superposition des réponses modales.

Pour certaines études (calcul non linéaire, certains calculs linéaires complexes) la seule autre technique possible concerne l'intégration numérique directe des équations de mouvement, faite pas à pas. Ces calculs sont généralement plus onéreux mais permettent une programmation relativement simple (81, 82).

C.2.1. Représentation par éléments finis

Pour la représentation géométrique du barrage, les problèmes sont essentiellement

mic analysis of dams as were discussed earlier with respect to the static analysis, and the same conclusions may be drawn. Thus two-dimensional models generally are as appropriate for dynamic as for static analysis of gravity dams, and the same form of three-dimensional idealization is suitable for modelling arch dams regardless of whether the response is static or dynamic. Moreover, it is essential to include a portion of the foundation rock in the finite element idealization in both kinds of analyses. However, the inclusion of the foundation material introduces additional problems in the seismic analysis that are not present in the static case, where the only function of the foundation elements is to represent the flexibility of the support medium. The additional dynamic problems will be described later; for the present it is sufficient merely to note that in a standard seismic response analysis, the finite element mesh extends only to a reasonable depth and is supported on an infinitely rigid base. The depth to which the foundation elements extend is usually taken as one to two times the height of the dam; typical idealizations of gravity and arch dams are shown in figures 19 and 20.

C.2.2. Equations of motion

The equations of motion [Eq. 5 *a*] express the dynamic response of the finite element model in terms of the modal displacement vector *a*. Assuming that the materials are linearly elastic, this may be written in the form [7 *a*] as :

$$\underline{M}\ddot{\underline{a}} + \underline{C}\dot{\underline{a}} + \underline{K}\underline{a} = \underline{F}(t) \quad [13]$$

where the element stiffness matrix *K* is given by equation 7 *b* and the element mass matrix *M* by equation 5 *c*. It should be noted that equation 5 *c* defines the so-called "consistent" mass matrix, because the same interpolation functions are used in *M* as are used in *K*. However, although certain bounding properties on the vibration frequencies may be applicable if the consistent mass matrix is used, in practice there is little advantage to be gained from this fact and it generally is more convenient and efficient to use a simpler lumped mass matrix obtained by merely associating a portion of the total element mass with each nodal point. An effective procedure for lumping mass in a

les mêmes que ci-dessus (calcul statique) et les conclusions à tirer restent valables. Ainsi, les modèles bidimensionnels sont généralement suffisants pour les barrages-poids; pour les barrages-voûtes, le même type de représentation tridimensionnelle est correct (calcul statique ou dynamique). En outre, il est encore une fois indispensable de représenter une partie de la fondation. Mais pour le calcul dynamique, la fondation pose des problèmes supplémentaires car dans le calcul statique, son seul but est de tenir compte de la souplesse du matériau de fondation du barrage. Ces problèmes supplémentaires seront examinés plus loin. Pour l'instant, il suffit de préciser que, dans le calcul sismique standard, le maillage ne s'étend que sur une profondeur raisonnable, la limite inférieure étant rigide et infinie. La fondation correspond généralement à deux fois la hauteur du barrage seulement (Fig. 19 et 20).

C.2.2. Équations de mouvement

Ces équations (équation 5 *a*) expriment la réponse dynamique du modèle correspondant au vecteur de déplacement modal *a*. Supposant l'élasticité linéaire des matériaux on peut écrire sous la forme [7 *a*] :

La matrice *K* de raideur des éléments étant donnée par l'équation 7 *b*, et la matrice *M* de masse de ceux-ci, par l'équation 5 *c*. A noter que l'équation 5 *c* définit ce que l'on nomme la matrice de masse « homogène », les mêmes fonctions d'interpolation étant utilisées dans *M* que dans *K*. Cependant, malgré la validité de certaines propriétés de limite des fréquences de vibration quand on utilise la matrice de masse « homogène », il n'y a que peu d'intérêt dans ce fait. Il est généralement plus commode et plus efficace d'utiliser une matrice de masse « globale » obtenue par simple affectation d'une partie de la masse totale de l'élément à chaque nœud. Une bonne technique de « globali-

general finite element system has been described by Hinton, *et al.* (83).

A special feature of the mass matrix required for the analysis of dams is that the inertia of the reservoir water must be accounted for as well as that of the dam material because the motions of the dam include corresponding motions of the water in contact with its face. In two-dimensional idealizations of gravity dams, this hydrodynamic effect generally is considered by assuming that the pressure changes at the face of the dam result from the action of a certain volume of water attached to the face. This "added mass" approach was originated by Westergaard (84) who suggested that the required volume of water might be idealized by a parabolic shape, as shown in figure 21. In the case of arch dams, the reservoir interaction effect is considerably more complex, but it usually is approximated by an extension of this added mass procedure. The required extension results from the fact that the Westergaard concept applies only when the seismic motion of the dam is normal to its surface. On the curved face of an arch dam, this condition may be met at one section for a given component of earthquake motion; at other sections it is assumed that the seismic pressure (i.e. added mass) is reduced in proportion to the cosine of the angle between the input motion and the normal to the face, and this added mass vector is then resolved into components corresponding to the nodal degrees of freedom. The complete mass matrix then includes the mass coefficients of the dam and foundation elements, plus the added mass of the water. More accurate methods for estimating the added mass matrix are discussed in C.3.3.

The damping matrix \underline{C} in equation 5 a represents the forces opposing the velocities of the finite element nodal points. Equation 5 c accounts for one component of the typical damping coefficient, associated with a body force damping parameter μ . More generally, the damping may also depend on a strain velocity parameter, \underline{D}_d , defined by $\underline{\sigma}_d = \underline{D}_d \dot{\underline{\epsilon}}$ where $\underline{\sigma}_d$ is the damping stress. An expression for the damping coefficients combining both damping mechanisms is as follows :

$$\underline{C} = \int_{\Omega} [\underline{N}^T \underline{\mu} \underline{N} + \underline{B}^T \underline{D}_d \underline{B}] d\Omega. \quad [14]$$

sation » des masses est donnée par Hinton *et al.* (83) pour un maillage type.

La matrice de masse utilisée pour le calcul des barrages présente la particularité suivante. Outre l'inertie du barrage, celle de l'eau stockée doit être prise en compte en raison des mouvements de l'eau qui baigne sa face amont. Pour les modèles bidimensionnels des barrages-poids, ce phénomène hydrodynamique est généralement traité en supposant que les variations des pressions appliquées sur la face amont du barrage proviennent d'un volume d'eau fixé à cette face (technique dite « de masse ajoutée »). Cette technique fut conçue par Westergaard (84), qui a proposé de représenter le volume d'eau par un tronçon de parabole (Fig. 21). Pour les barrages-voûtes, le mécanisme est beaucoup plus complexe, mais on adopte néanmoins généralement une extrapolation de cette méthode de « masse ajoutée ». En effet, le concept de Westergaard n'est valable que pour les mouvements normaux à la face du barrage. Sur la face courbe d'une voûte, cette condition peut être satisfaite à une section donnée pour une composante donnée du mouvement sismique, mais ailleurs, on suppose que la pression sismique (c'est-à-dire : la masse ajoutée) se trouve réduite en fonction du cosinus de l'angle que fait la secousse avec la normale du parement; ce vecteur de la masse ajoutée est alors décomposé en fonction des degrés de liberté des nœuds. Ainsi, la matrice de masse complète comprend les coefficients de masse des éléments du barrage et de sa fondation et la masse ajoutée par l'eau. Des techniques plus précises d'estimation de la matrice de masse ajoutée sont décrites au § C.3.3.

La matrice d'amortissement (équation 5 a) traduit les forces qui s'opposent à la vitesse des nœuds. L'équation 5 c donne un des éléments du coefficient d'amortissement (paramètre d'amortissement μ de la force volumique). L'amortissement peut également être lié à un paramètre de vitesse de déformation \underline{D}_d , défini par $\underline{\sigma}_d = \underline{D}_d \dot{\underline{\epsilon}}$ où $\underline{\sigma}_d$ est la contrainte d'amortissement. Pour tenir compte des deux mécanismes, on peut écrire :

No limitation on the spatial variation of the damping properties is implied in equation 14; however, if the damping properties are everywhere in proportion to the mass and elastic properties (i.e. if $\mu = \alpha\rho$ and $\underline{D}_d = \beta\underline{D}$, where α and β are proportionality factors) then it is evident that :

$$\underline{C} = \alpha\underline{M} + \beta\underline{K} \quad [15]$$

as was noted earlier.

Although there is little direct evidence that the local viscous resistance in an actual dam is directly proportional to the mass and elastic properties, the damping matrix of equation 15 does provide damping behavior which is reasonably consistent with experimental observations. Conveniently, this form of damping introduces no coupling between the vibration modes of the structure, and values of α and β can be selected to provide reasonable damping ratios for all modes of significance. In standard linear analyses, however, there is no need to evaluate α and β , or to obtain an explicit expression for \underline{C} ; instead the damping is defined directly in terms of modal damping ratios, as will be explained later.

The effective seismic force input on the right hand side of equation 13 may be derived assuming that, during the earthquake, the base to which the foundation elements are attached moves in simple translation as a rigid surface. The effective force vector is then given by :

$$\underline{F}(t) = -\underline{M}\underline{r}\ddot{v}_g(t), \quad [16]$$

and the base is assumed for further analysis to be fixed at zero displacement.

Here $\ddot{v}_g(t)$ is the acceleration time history of the input earthquake, and \underline{r} is the vector of displacement influence coefficients indicating the static displacement of each DOF in \underline{a} due to a static displacement of the base ($v_g = 1$). In equation 16, it is assumed that each directional component of the input earthquake is considered separately; however, an input vector including all base motion components simultaneously could be

Cette équation n'implique pas de limitation des variations spatiales des caractéristiques d'amortissement. Mais si celles-ci sont partout fonction de la masse et des caractéristiques élastiques (c'est-à-dire : si $\mu = \alpha\rho$ et $\underline{D}_d = \beta\underline{D}$, où α et β sont les coefficients de proportionnalité), alors il est évident que :

comme on l'a vu ci-dessus.

S'il y a peu d'évidence directe pour supposer que la résistance visqueuse locale d'un barrage réel est fonction directe de la masse et des caractéristiques élastiques, la matrice d'amortissement (équation 15) conduit néanmoins à un comportement en amortissement qui confirme assez bien les observations. Cette sorte d'amortissement heureusement ne fait intervenir aucun couplage entre les différents modes de vibrations de l'ouvrage, et l'on peut choisir les valeurs de α et de β pour obtenir des rapports d'amortissement convenables pour tous les nœuds importants. Cependant, pour le calcul linéaire ordinaire, il est inutile d'apprécier α ou β , ou d'obtenir une expression explicite pour \underline{C} . En effet, l'amortissement est défini directement par rapport aux rapports d'amortissement modaux (voir ci-dessous).

On peut obtenir la force sismique à appliquer (terme de droite, équation 13) en supposant que, lors d'un séisme, la limite sur laquelle les éléments de la fondation sont fixés, se déplace par simple translation, et qu'elle correspond à une surface rigide. Dans ce cas, le vecteur de force effectif est donné par :

et, pour la suite des calculs, la limite est considérée comme étant fixe, à déplacement nul.

Le terme $\ddot{v}_g(t)$ correspond à l'évolution dans le temps du séisme \underline{r} représentant les coefficients d'influence des vecteurs de déplacement qui donnent le déplacement statique de chaque degré de liberté en \underline{a} , déplacement produit par le déplacement statique de la limite inférieure ($v_g = 1$). Dans l'équation 16, on suppose que chaque composante directionnelle du séisme est prise en compte séparément, mais on pourrait utiliser un vec-

used if \underline{r} is expanded to include all corresponding influence coefficient vectors.

teur qui englobe l'ensemble des composantes du mouvement de la limite si \underline{r} est élargi pour comprendre tous les vecteurs correspondants des coefficients d'influence.

C.2.3. Transformation to modal coordinates

The free vibration mode shapes and frequencies of the undamped finite element idealization are found by solving the eigenproblem :

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \underline{\Phi}_n = \underline{C}, \quad [17]$$

in which \underline{K} and \underline{M} are the stiffness and mass matrices of equation 13 (where \underline{M} includes the added mass of the reservoir water), and ω_n and $\underline{\Phi}_n$ represent the frequency and shape of mode n . Any standard eigenproblem solver can be used to evaluate these vibration properties; for a refined idealization which may include many hundreds of degrees of freedom, the subspace iteration method (85) has proven to be most efficient.

In general, only a limited number of the lowest mode shapes are computed, and it is assumed that the dynamic response can be approximated adequately by these few modal coordinates as follows :

$$\underline{a}(t) = \underline{\Phi} \underline{Y}(t), \quad [18]$$

where $\underline{\Phi}$ is the listing of the significant mode shape vectors and $\underline{Y}(t)$ is the generalized coordinate vector defining their respective amplitudes. Introducing the coordinate transformation of equation 18 into equation 13 results in a set of uncoupled modal response equations of the form :

$$M_n \ddot{Y}_n + 2\omega_n \xi_n \dot{M}_n Y_n + \omega_n^2 M_n Y_n = P_n(t), \quad [19]$$

in which :

$$M_n = \underline{\Phi}_n^T \underline{M} \underline{\Phi}_n \text{ (generalized mass of mode } n),$$

(masse généralisée de mode n)

$$P_n(t) = \underline{\Phi}_n^T \underline{F}(t) = - \underline{\Phi}_n^T \underline{M} \underline{r} \ddot{v}_r(t) \text{ (generalized force),}$$

(force généralisée),

and ξ_n is the damping ratio specified for mode n . In this formulation, it is assumed that the dam foundation system (which includes the added mass of the water) is propor-

C.2.3. Transformation en coordonnées modales

Pour un maillage non amorti, on détermine les formes et les fréquences en vibration propre par résolution du problème (valeurs propres) :

\underline{K} et \underline{M} respectivement les matrices de raideur et de masse (équation 13). \underline{M} englobe la masse ajoutée par l'eau stockée et ω_n et $\underline{\Phi}_n$ respectivement, la fréquence et la forme de mode n . Un « Eigenproblem solver » quelconque suffit pour l'évaluation de ces caractéristiques de vibration. Pour un modèle poussé comprenant jusqu'à plusieurs centaines de degrés de liberté, la méthode par itération des sous espaces (85) s'est avérée la plus efficace.

En général, on étudie seulement un nombre limité de formes modales inférieures. En effet on suppose que la réponse dynamique peut être trouvée avec une approximation suffisante à l'aide de ces quelques coordonnées modales ainsi :

où $\underline{\Phi}$ le listing des vecteurs de formes modales importants et $\underline{Y}(t)$ le vecteur des coordonnées généralisées qui définit les amplitudes correspondantes. L'introduction dans l'équation 13 de la transformation des coordonnées de l'équation 18 donne un ensemble d'équations des réponses modales non couplées :

dans laquelle :

ξ_n est le rapport d'amortissement spécifié pour mode n . Dans cette équation, on suppose que le barrage avec sa fondation (y compris la masse ajoutée par l'eau) subit un

tionally damped so that no damping coupling is developed between the modes. If the damping is nonproportional, the modal response equations will be coupled by damping force terms; the dynamic response may then be obtained by integrating simultaneously the coupled modal equations (86).

C.2.4. Dynamic response analysis

Because of the chaotic nature of the design earthquake excitation, $\ddot{v}_g(t)$, the dynamic response history of the dam can be obtained only by numerical integration of the equations of motion. The step-by-step solution of the uncoupled equations [19] may be performed conveniently by the Newmark β method (87), using either the constant average acceleration ($\beta = 1/4$) or the linear acceleration ($\beta = 1/6$) procedure. In this regard it may be noted that an unconditionally stable method is not required because the integration interval is specified separately for each mode, and in each mode the time step required for accuracy will ensure stability. The total displacement time-history response is then obtained by superposing the modal contributions as indicated by equation 18. In principle the displacement response represents the complete solution of the seismic response problem because any other response quantity (stresses or strains, resultant forces, etc.) can be determined from the displacements. In most practical cases it is convenient to extend the analysis to include evaluation of the stress distribution $\underline{\sigma}(t)$; this is obtained from the displacements by means of a stress transformation matrix \underline{T} , as follows :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{T} \underline{a}(t). \quad [20]$$

As an alternative to the very time-consuming direct step-by-step integration of the response equations, a good approximation of the maximum seismic response can be obtained by making use of the response spectrum of the design earthquake. The maximum modal responses derived from the response spectrum are superposed by the root-sum-square method to obtain the total response. In general, it is most convenient to carry out the calculations for a new design

amortissement proportionnel; ainsi, il n'y a pas de couplage de l'amortissement entre modes. Si l'amortissement n'est pas proportionnel par contre les équations de réponse modale se verront couplées par des termes correspondant aux forces d'amortissement. Dans ce cas on peut obtenir la réponse dynamique par intégration simultanée des équations modales couplées (86).

C.2.4. Calcul du comportement dynamique

Compte tenu de la nature aléatoire de l'excitation $\ddot{v}_g(t)$ provoquée par le séisme, l'étude de la réponse du barrage en fonction du temps exige l'intégration numérique des équations de mouvement. On peut procéder à la résolution pas à pas des équations non-couplées [19] par la méthode β de Newmark (89), à l'aide soit de l'accélération moyenne constante ($\beta = 1/4$), soit de l'accélération linéaire ($\beta = 1/6$). A ce propos, il faut remarquer qu'une méthode parfaitement stable n'est pas nécessaire, puisque l'intervalle d'intégration est spécifié séparément pour chaque mode, et dans chaque mode, l'intervalle de temps nécessaire à une bonne précision assure la stabilité. On obtient les déplacements de l'ensemble dans le temps par superposition des composantes dues à chaque mode [18]. En principe ces déplacements correspondent à la solution complète, car tout autre grandeur (constances, déformations, résultantes...) peut se calculer à partir de ces déplacements. Dans la pratique, il est souvent commode d'étendre l'étude jusqu'à l'évaluation du champ de contraintes $\underline{\sigma}(t)$, obtenu à partir des déplacements au moyen d'une matrice \underline{T} de transformation :

Outre cette longue intégration directe (pas-à-pas), il existe aussi la méthode du spectre pour obtenir une estimation de la réponse sismique maximale. Dans cette technique, les réponses modales maximales obtenues à partir du spectre sont superposées (par la méthode « racine de la somme des carrés ») pour obtenir la réponse totale. Généralement, pour un projet parfaitement nouveau, il est commode d'utiliser cette technique, le séisme étant défini par un

by the response spectrum approach, using an appropriate idealized design spectrum (88) as the earthquake definition. Safety calculations of existing structures, however, are more frequently done by step-by-step integration of the response to an assumed accelerogram, because this avoids the approximation which results from the modal superposition in the response spectrum analysis.

C.3. PROBLEM AREAS IN EARTHQUAKE ANALYSIS OF DAMS

Although the standard procedure for dynamic finite element analysis outlined above is well established and has been used extensively in the earthquake response analysis of many types of structures, several questionable assumptions are made with respect to the seismic analysis of dams which require further consideration. The more important of these are discussed in the following paragraphs.

C.3.1. Seismic input mechanism

The unique feature of the earthquake response problem is that no dynamic loads are applied directly to the structure; instead its support points are subjected to the motions of the earthquake waves propagating through the foundation medium. The forces which are applied at the support points are only a secondary consequence of these base motions. The major difficulty that arises in defining the earthquake input is that the structure interacts with the support medium in its dynamic response; thus the base motion history with the structure in place is not the same as the « free-field » motion that would have occurred had the structure not been there.

It is in order to account for this foundation-structure interaction effect that a significant block of foundation material is included with the finite element idealization of the structure. However, it should be noted that in the dynamic response problem, the inertial and damping forces of the foundation medium contribute to its dynamic response, in addition to the contact forces imposed by the structure; hence the defor-

spectre hypothétique. Pour l'étude de la sécurité des ouvrages existants, par contre, on préfère habituellement l'intégration pas-à-pas de la réponse à un accélérogramme hypothétique, car on évite ainsi l'imprécision apportée par la superposition des réponses modales dans la technique précédente.

C.3. ASPECTS PROBLÉMATIQUES DU CALCUL

Si la méthode ci-dessus du calcul dynamique par éléments finis est utilisée largement pour l'étude du comportement sismique de divers types d'ouvrages, il n'en reste pas moins qu'elle fait intervenir plusieurs hypothèses contestables. Les plus importantes seront discutées dans les paragraphes suivants.

C.3.1. Méthode d'application du séisme à l'ouvrage.

L'aspect exceptionnel de l'étude du comportement sismique est le suivant : les efforts dynamiques ne sont pas appliqués directement à l'ouvrage. En effet, les points de support de l'ouvrage sont soumis aux mouvements provoqués par les ondes sismiques qui passent dans la fondation. Ainsi, les forces appliquées en ce point de support ne sont qu'une conséquence secondaire des mouvements sismiques. Les plus grands problèmes relatifs à la définition du séisme appliqué concernent le phénomène d'interaction entre l'ouvrage et son support. Autrement dit, la réponse du milieu avec l'ouvrage n'est pas celle du milieu avant la réalisation de celui-ci.

C'est pour tenir compte de ce phénomène d'interaction entre la fondation et l'ouvrage que l'on inclut, dans le maillage, une grande tranche de la fondation. Cependant, il faut noter que les forces d'inertie et d'amortissement de la fondation contribuent à la réponse dynamique (outre les forces de contact imposées par l'ouvrage). Ainsi, les déformations ne sont pas localisées (comme dans le calcul statique); on ne cons-

mations are not localized as in the static case and do not converge to a unique solution as the volume of foundation material is increased. Moreover, the foundation not only participates in the dynamic response of the dam, it also may modify the character of the seismic waves which pass through it; thus the motions which should be applied to the base of the foundation finite elements may differ drastically from the motions observed at the surface. Inasmuch as there are few direct observations of the motions which actually exist deep in the foundation medium, it is advantageous to define the seismic input in terms of the free-field motions which would have existed at the surface without the dam, rather than as the basement rock motions.

One formulation of the dynamic response problem in terms of the free-field motions is presented in the following paragraphs (89); in this approach, the mathematical model of the combined foundation-structure system may be assumed exactly like that described above, only the input mechanism is changed. An alternative formulation based on the substructure concept, which employs a frequency domain analysis to permit treating the foundation as an elastic half-space, will be outlined later.

The present formulation is described with reference to figure 22 which defines notation distinguishing the properties and motions of the free-field system from the corresponding quantities after the structure is built. The free-field response to the basement rock excitation first is expressed as follows :

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{a}} + \tilde{C} \dot{\tilde{a}} + \tilde{K} \tilde{a} = \underline{F}_r, \quad [21]$$

in which "tildes" denote the system property matrices before the dam is constructed as well as the free-field displacements, and \underline{F}_r represents the forces exerted by the basement rock on the finite element model (see figure 22). The corresponding equation after construction of the dam may be written :

$$\bar{M} \ddot{\bar{a}} + \bar{C} \dot{\bar{a}} + \bar{K} \bar{a} = \underline{F}_r, \quad [22]$$

in which "bars" denote the property matrices after construction of the dam (i.e. $\bar{M} = M + \tilde{M}$ where M is the mass of the added dam structure, etc.) as well as the motion of the combined system after construction, and \underline{F}_r , again is the input from the

tate donc pas une convergence vers une solution univoque en augmentant le volume de fondation représenté. De plus, la fondation, tout en participant à la réponse dynamique du barrage, peut également modifier la nature des ondes sismiques qui la parcourt. Ainsi, les mouvements à appliquer à la limite inférieure du modèle peuvent être très différents de ceux observés à la surface du terrain. Puisque les observations directes des mouvements en profondeur sont rares, il est intéressant de définir le séisme à appliquer par rapport aux mouvements qui se produiraient si le barrage n'existait pas, et non par rapport aux mouvements de la limite inférieure du modèle.

On explique cette technique dite des « mouvements vierges » ci-dessous (89). Le modèle mathématique de l'ouvrage avec sa fondation peut être pris identique à celui décrit ci-dessus, à l'exception d'une modification du mécanisme d'application du séisme. (Un autre modèle inspiré par la notion de « substructure », utilisant un domaine de fréquences pour permettre l'utilisation d'un espace semi-infini et élastique pour la fondation sera brièvement décrit plus loin).

La description de la technique des mouvements vierges fait référence à la figure 22 (notations avant et après réalisation du barrage). D'abord, pour la réponse de la fondation vierge, mise en vibration par la limite inférieure, on écrit :

les « tildes » (\sim) désignent les matrices de caractéristiques avant réalisation de l'ouvrage, ainsi que les déplacements; \underline{F}_r correspond aux forces appliquées par la limite inférieure sur le modèle (Fig. 22). Après réalisation du barrage, on peut écrire :

les traits supérieurs ($\bar{\quad}$) désignent les matrices de caractéristiques après réalisation du barrage (c'est-à-dire $\bar{M} = M + \tilde{M}$, où \tilde{M} correspond à la masse du barrage ajouté, etc.) ainsi que les mouvements de l'ensemble (barrage et fondation); la définition de \underline{F}_r

basement rock. Expressing the displacements as the sum of the free-field plus the added motion \underline{a}^t (i.e. $\underline{\tilde{a}} = \underline{a}^t + \underline{\tilde{a}}$) and substituting equation 21, equation 22 can be reduced to :

$$\overline{M} \ddot{\underline{a}}^t + \underline{C} \dot{\underline{a}}^t + \underline{K} \underline{a}^t = - \overline{M} \ddot{\underline{\tilde{a}}} - \underline{C} \dot{\underline{\tilde{a}}} - \underline{K} \underline{\tilde{a}}. \quad [23]$$

Finally expressing the added displacements as the sum of a dynamic term \underline{a} , plus a pseudo-static term \underline{a}^s (i.e. $\underline{a}^t = \underline{a} + \underline{a}^s$) where the pseudo-static term is given by :

$$\underline{a}^s = - \underline{K}^{-1} \underline{K} \underline{\tilde{a}}, \quad [24]$$

the equations of motion become :

$$\overline{M} \ddot{\underline{a}} + \underline{C} \dot{\underline{a}} + \underline{K} \underline{a} = [\overline{M} \underline{K}^{-1} \underline{K} - \underline{M}] \ddot{\underline{\tilde{a}}}. \quad [25]$$

This is equivalent to equation 13, except that the seismic excitation is given in terms of the free-field accelerations rather than the basement rock accelerations as in equation 16. In equation 25, the " bars " denote the property matrices of the complete dam plus foundation system while the property matrices without " bars " represent only the added structure. Moreover, the pseudo-static displacements of equation 24 must be added to the dynamic displacements of equation 25 to obtain total response.

It is important to note that the only important degrees of freedom in the free-field vector $\underline{\tilde{a}}$ are those of nodes along the surface which connects with the dam structure, because the seismic input vector is derived from the added structure interacting with the free-field motion. In principle any desired spatial variation of these free-field components could be considered; however, there seldom is sufficient information to specify such a variation and usually the same free-field displacement is assumed for each contact point. This assumed rigid body behavior is reasonable for the contact surface at the base of a gravity dam, hence the seismic analysis of such structures may be carried out effectively by the free-field approach. On the other hand, the free-field motions cannot be assumed uniform all along the canyon wall contact surface of an arch dam, and no reasonable variation can be hypothesized for this situation. Accordingly, it is customary to prescribe the seismic input for an

reste la même. Si nous posons que les déplacements correspondent à la somme (milieu vierge + mouvement ajouté \underline{a}^t) (c'est-à-dire : $\underline{a} = \underline{a}^t + \underline{\tilde{a}}$), on peut écrire l'égalité entre les équations 21 et 22 ainsi :

Enfin, les déplacements ajoutés peuvent être pris comme la somme d'un terme dynamique et d'un terme pseudo-statique \underline{a}^s ($\underline{a}^t = \underline{a} + \underline{a}^s$) donné par :

et ainsi, les formules de mouvement s'écrivent :

Cette formule est équivalente à l'équation 13, seulement l'excitation sismique est donnée par rapport aux accélérations en milieux vierges plutôt qu'à celle de la limite inférieure (équation 16). Dans l'équation 25, les traits supérieurs (̄) correspondent aux matrices des caractéristiques de l'ensemble (barrage et fondation), les matrices dépourvues de traits ne désignant que l'ouvrage ajouté. De plus, les déplacements pseudo-statiques de l'équation 24 sont à ajouter aux déplacements de l'équation 25 pour obtenir la réponse sismique totale.

Il est important de noter que les seuls degrés de liberté significatifs dans le vecteur $\underline{\tilde{a}}$ du milieu vierge sont ceux des nœuds au contact du barrage, puisque le vecteur d'application du séisme est obtenu à partir de l'interaction de l'ouvrage ajouté et des mouvements vierges. En principe, on pourrait tenir compte de toute variation dans l'espace de ces composantes vierges, mais il est rare de disposer d'informations suffisantes pour définir de telles variations. Ainsi, on suppose généralement le même déplacement vierge pour chaque nœud de contact. Cette hypothèse de comportement rigide est acceptable pour la surface de contact à la base d'un barrage-poids, et ainsi, on peut utiliser cette technique du milieu vierge pour le calcul sismique de ce type de barrage. Par contre, on ne peut supposer une telle uniformité des mouvements vierges le long des appuis d'un barrage-voûte, et de plus, il n'y a aucune hypothèse de variation acceptable. Ainsi, pour les barrages-voûtes,

arch dam as a rigid body translation of the basement rock even though the actual characteristics of such motions are not well known.

C.3.2. Foundation-structure interaction

In the foregoing formulation of the earthquake response problem, foundation-structure interaction has been accounted for by simply including a significant portion of the foundation rock together with the structure in the mathematical model. Inherent in this approach is the fact that the finite element foundation model has a finite boundary which is treated as a rigid support. This type of idealization is quite suitable for situations where the geological structure actually includes a sharp discontinuity in stiffness properties at a reasonable depth below the surface, as may occur at typical earth dam sites. However, in many cases, particularly at sites of concrete dams, there is no actual geological discontinuity and the finite element model does not represent reality.

The basic error introduced by the fictitious finite element boundary is that the vibratory waves induced in the foundation medium by the foundation-structure interaction are reflected by the boundary back toward the structure rather than allowed to radiate outward indefinitely. If a large enough foundation block is included in the mathematical model, the interaction wave energy will be dissipated by internal hysteresis in the foundation medium and spurious wave reflections from the boundary will not significantly influence the structure. However, for reasons of computational economy it is desirable to limit the number of degrees of freedom in the foundation. (Note in figures 19 and 20 that more degrees of freedom are included in the foundation blocks than in the dams which are the subjects of interest.) One approach to avoiding the spurious boundary reflections with a relatively small foundation block is by means of "quiet boundary" devices, as mentioned in Part A; however, such devices can only partially eliminate reflections in two and three-dimensional models. An alternative approach, which may be used if the

on suppose des translations d'un milieu rigide pour définir les mouvements appliqués à la fondation, malgré la connaissance très imparfaite des caractéristiques réelles de ces mouvements.

C.3.2. Interactions de l'ouvrage et de la fondation

La prise en compte de cette interaction est faite ci-dessus en représentant, dans le modèle, une partie importante de la fondation. Or le maillage comporte obligatoirement une limite inférieure qui intervient comme un support rigide. Cette disposition est acceptable lorsque la géologie présente, dans la réalité une brusque variation de raideur à relativement faible profondeur (par exemple, sur beaucoup de sites de digues). Par contre, souvent il n'y a aucune discontinuité de cette sorte, notamment sous les barrages en béton, dans ce cas, le modèle fait d'éléments finis n'est pas représentatif de la réalité.

L'erreur fondamentale introduite par cette limite fictive concerne la réflexion des ondes vibratoires provoquées au sein de la fondation par l'interaction barrage-fondation. Ces ondes sont ainsi renvoyées vers l'ouvrage, alors que dans la réalité, elles se propagent radialement sans fin. Si la tranche de la fondation incluse dans le maillage est assez importante, l'énergie de ces ondes induites par l'interaction barrage-fondation sera dissipée dans la fondation par hysteresis interne. Ainsi les ondes parasites réfléchies auront peu d'influence. Mais pour éviter un calcul trop onéreux, il est souhaitable de limiter le nombre de degrés de liberté dans le maillage de la fondation. Dans les figures 19 et 20, il faut noter qu'il y a plus de degrés de liberté dans le maillage de la fondation que dans celui du barrage, pourtant c'est ce dernier que l'on veut étudier). On essaie d'éliminer ces ondes parasites tout en prenant une tranche de fondation relativement peu importante par l'adoption de « limites souples » (voir Partie A ci-dessus). Mais ces dispositions ne peuvent les éliminer que partiellement pour les modèles bi et tridimensionnels.

geological structure includes no significant material discontinuities, is to idealize the foundation rock as a semi-infinite elastic medium, as described in the following paragraphs.

The formulation of dynamic foundation-structure interaction of a two-dimensional gravity dam idealization may be carried out conveniently by treating the system as two substructures (90). With this concept the dam may be idealized by the finite element method, thus taking advantage of its ability to handle systems of arbitrary geometry. At the same time the foundation rock may be treated as an elastic half-space, an approach which is ideally suited to its simplified boundary conditions and semi-infinite extent, and which is computationally more efficient than a finite element idealization. To derive this method, the equations of motion of the finite element model of the dam monolith are expressed :

$$\underline{M}_c \ddot{\underline{a}}_c + \underline{C}_c \dot{\underline{a}}_c + \underline{K}_c \underline{a}_c = - \underline{M}_c \underline{r}_c \ddot{\underline{v}}(t) + \underline{R}_f(t). \quad [26]$$

In equation 26, \underline{a}_c is the vector of displacements of the finite element dam model, including the degrees of freedom at the base of the monolith, relative to the prescribed free-field motion $\underline{v}(t)$, and \underline{M}_c , \underline{C}_c and \underline{K}_c are property matrices defined for these same degrees of freedom of the dams. $\underline{R}_f(t)$ are the interaction forces (i.e. the forces exerted by the foundation rock on the dam) which are nonzero only for the base degrees of freedom.

Because the elastic half-space interaction analysis is best carried out in the frequency domain, the response to a harmonic free-field motion $\underline{v}(t) = e^{i\omega t}$ is determined first; thus equation 26 becomes.

$$[-\omega^2 \underline{M}_c + i\omega \underline{C}_c + \underline{K}_c] \underline{\bar{a}}_c(\omega) = - \underline{M}_c \underline{r}_c + \underline{R}_f(\omega). \quad [27]$$

Partitioning the harmonic displacement amplitudes and interaction force amplitudes into terms associated with the base degrees of freedom, $\underline{\bar{a}}_b$, and those above the base, i.e.

$$\underline{\bar{a}}_c = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\bar{a}} \\ \underline{\bar{a}}_b \end{array} \right\}; \quad \underline{R}_f = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{R}_b \end{array} \right\},$$

the interaction forces may be expressed in terms of the base displacements of the dam,

On dispose aussi d'une autre technique lorsqu'il n'y a pas de discontinuité de caractéristiques de la fondation — la fondation devient alors un milieu élastique semi-infini (voir ci-dessous).

Pour le modèle bidimensionnel de barrage-poids, on peut étudier l'interaction barrage-fondation en divisant l'ensemble en deux sous-structures ou sous-ensembles (90) : le barrage est reproduit par un maillage d'éléments finis (ce qui a l'avantage de permettre une géométrie quelconque), et la fondation est un espace élastique semi-infini (cette hypothèse est bien adaptée aux conditions aux limites simplifiées et à l'étendue semi-infinie de la fondation. Elle est donc plus rationnelle qu'un maillage en éléments finis). Pour cette technique, les équations de mouvements (éléments finis du barrage monolithique s'écrivent :

\underline{a}_c est le vecteur des déplacements du modèle en éléments finis (y compris les degrés de liberté à la base du monolithe) en fonction de mouvements vierges posés $\underline{v}(t)$, \underline{M}_c , \underline{C}_c , \underline{K}_c sont des matrices des caractéristiques définies pour ces mêmes lignes de liberté du barrage. $\underline{R}_f(t)$ sont les forces d'interaction (les forces appliquées au barrage par la fondation rocheuse). Elles sont non nulles seulement pour le degré de liberté à la base.

Puisqu'il est préférable d'effectuer ce calcul pour le domaine de fréquences, la réponse vis-à-vis d'un mouvement vierge harmonique : $\underline{v}(t) = e^{i\omega t}$ est déterminée d'abord; ainsi on peut ré-écrire l'équation 26 :

En dissociant les amplitudes des déplacements harmoniques et celles des forces d'interaction en termes liés à ces degrés de liberté d'une part à la base \underline{a}_b et d'autre part au-dessus de la base, c'est-à-dire :

on peut ainsi exprimer les forces d'interaction en fonction des déplacements à la

which are the same as the surface displacements of the elastic half-space, as follows :

$$\bar{R}_b(\omega) = \underline{S}_b(\omega) \bar{a}_b(\omega). \quad [28]$$

Finally, incorporating $\underline{S}_b(\omega)$ in a null matrix of the dimensions of the full set of degrees of freedom :

$$\underline{S}_c(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{S}_b(\omega) \end{bmatrix},$$

the equation of motion becomes :

$$[-\omega^2 \underline{M}_c + i\omega \underline{C}_c + \underline{K}_c + \underline{S}_c(\omega)] \bar{a}_c(\omega) = -\underline{M}_c r_c, \quad [29]$$

where $\underline{S}_c(\omega)$ (or its non-zero partition $\underline{S}_b(\omega)$) represents the frequency dependent stiffness contribution of the elastic half space, which is yet to be evaluated.

$\underline{S}_b(\omega)$ is a square matrix of order equal to the number of degrees of freedom on the dam-foundation interface. The $m-n$ term of this matrix represents the harmonic force in degree of freedom m due to the harmonic displacement $e^{i\omega t}$ imposed in degree of freedom n , while all other connection degrees of freedom are fixed against motion but the non-connection surface nodes are unconstrained (as shown in Fig. 23). In practice it has been found convenient to solve this mixed boundary value problem in two steps. First, the standard stiffness matrix for all surface degrees of freedom is derived, with only one degree of freedom at a time permitted to move. This requires the solution of only a single boundary value problem because all other stiffness coefficients are obtained by simple translation of the coordinate axes. Then the constraints at nodes outside of the dam base are relaxed, and the reduced stiffness matrix for the contact degrees of freedom is obtained by static condensation.

After $\underline{S}_b(\omega)$ has been determined, this standard frequency domain procedure for dynamic response analysis would be to calculate $\bar{a}_c(\omega)$ from equation 29 for each frequency step in the range of interest, multiply this complex frequency response function by the Fourier transform of the free-field motion, $\bar{y}(t)$, and then take the inverse Fourier

base du barrage, déplacements qui sont identiques à ceux à la surface de l'espace semi-infini :

Enfin, si nous incorporons $\underline{S}_b(\omega)$ dans une matrice nulle des dimensions de l'ensemble des degrés de liberté :

l'équation de mouvement devient :

dans cette équation, $\underline{S}_c(\omega)$ (ou sa partition non nulle $\underline{S}_b(\omega)$) correspond à la contribution apportée par la raideur de l'espace semi-infini. Cette contribution qui dépend de la fréquence, est à évaluer.

$\underline{S}_b(\omega)$ est une matrice carrée dont l'ordre est égal au nombre de degrés de liberté au contact barrage-fondation. Dans cette matrice, le terme $m-n$ correspond à la force harmonique (de degré de liberté m) produite par le déplacement harmonique $e^{i\omega t}$ imposé au degré de liberté n ; l'ensemble des autres degrés de liberté du contact dépendent des mouvements tandis que les nœuds qui ne sont pas situés sur la surface de contact sont libres (Fig. 23). Dans la pratique, il s'est avéré commode de résoudre ce problème de valeurs mixtes aux limites en deux étapes. D'abord, on déduit la matrice de raideur ordinaire pour tous les degrés de liberté superficiels, un seul degré de liberté pouvant se déplacer à la fois. On a ainsi à résoudre un problème unique de valeur à la limite, tous les autres coefficients de raideur étant obtenus par simple translation des axes du système de coordonnées. Ensuite, on élimine les contraintes (restriction de mouvement) imposées aux nœuds autres que ceux situés à la base du barrage; la matrice réduite de raideur pour les degrés de liberté au contact est obtenue par condensation statique.

Après détermination de $\underline{S}_b(\omega)$, la méthodologie ordinaire à suivre pour le calcul du comportement dynamique par étude des domaines de fréquence est de calculer $\bar{a}_c(\omega)$ (équation 29) pour chaque palier de fréquences de la gamme à étudier, de multiplier cette fonction complexe par la transformation de Fourier du mouvement « vierge »

transform of the product function to obtain the displacement history $\underline{a}_c(t)$. However, because equation 29 includes all of the degrees of freedom of the finite element idealization, the computational effort required for solution of this complex equation set for each of the hundreds of frequencies required to define the frequency response function would be prohibitive. Therefore it is necessary to express the displacements of the structure approximately in terms of a limited set of generalized coordinates, thus :

$$\underline{a}_c(\omega) = \underline{\Psi} \underline{Z}(\omega) \quad [30]$$

and to transform equation 29 to these coordinates before evaluating the complex frequency response function. The vibration mode shapes of the system with the foundation stiffness set at its zero frequency value have proven to be effective shape functions $\underline{\Psi}$ for this purpose. As few as five such coordinates provide excellent results, and evaluation of the complex frequency response function for this number of coupled equations is not expensive.

In principle, a similar form of substructure analysis could be employed to account for foundation interaction with an arch dam structure. However, evaluation of the semi-infinite foundation stiffness matrix for a set of nodal points at the canyon contact surface would be a very difficult task. Moreover, as was noted before, no information is available about the free-field earthquake motions at such a canyon contact surface. Consequently, the only presently feasible means of treating the three-dimensional arch dam-foundation interaction problem appears to be the standard approach of including a finite block of foundation material supported on a rigid base as part of the finite element idealization.

C.3.3. Hydrodynamic interaction

The Westergaard "added mass" approach to accounting for the hydrodynamic effects of the water in the reservoir is based on two assumptions that are not satisfied in actuality : that the dam is rigid and the water incompressible. Accordingly, even though this concept has long been used in practical dam design throughout the world, the range of conditions for which it is valid

$\underline{\hat{y}}(t)$, et de déduire les déplacements en fonction du temps $\underline{a}_c(t)$ à l'aide de la transformation de Fourier inverse du produit. Cependant, l'équation 29 englobant l'ensemble des degrés de liberté du maillage, il serait trop onéreux de résoudre cet ensemble de formules complexes pour chacune des centaines de fréquences nécessaires à la détermination de la fonction traduisant la réponse à ces fréquences. Ainsi, il faut exprimer approximativement les déplacements de l'ouvrage par rapport à un système de référence généralisé, à savoir :

et transposer l'équation 29 en ces coordonnées avant d'évaluer cette fonction complexe de réponse. Les formes vibratoires modales du milieu (la raideur de la fondation étant prise égale à sa valeur correspondant à une fréquence nulle) se sont avérées être des fonctions de formes ψ à cet effet. Un nombre réduit de coordonnées de cette sorte (5 seulement) donne d'excellents résultats et, de cette façon, l'évaluation de la fonction complexe ne coûte pas cher.

En principe, on pourrait utiliser une autre technique de calcul par sous-ensembles adaptée à l'étude de l'interaction de la fondation et d'un barrage-voûte, mais il serait très difficile d'évaluer, pour une fondation semi-infinie, une matrice de raideur correspondant aux nœuds disposés sur le pourtour de l'ouvrage. De plus, comme on l'a déjà dit plus haut, on ne dispose d'aucun renseignement relatif aux déplacements « vierges » des versants sous l'action des séismes. Par conséquent, le seul moyen valable dont on dispose actuellement pour étudier en trois dimensions les interactions barrage-voûte-fondation semble être la méthode de base (une tranche de la fondation sous le barrage, reposant sur une limite inférieure rigide).

C.3.3. Interaction hydrodynamique

La technique de Westergaard (masse ajoutée) permettant la prise en compte de l'action de l'eau stockée lors d'un séisme repose sur deux hypothèses qui ne confirment pas la réalité, le barrage est supposé rigide, et l'eau est supposée incompressible. Malgré la longue utilisation de cette technique partout dans le monde, on n'a toujours pas établi les conditions de validité,

has not been established and this question has been the subject of extensive research in recent years.

An important advance in the treatment of hydrodynamic interaction is the modelling of the water by finite element procedures. Assuming the water to be incompressible, the analysis of dynamic interaction between a flexible structure and the water can be carried out by standard dynamic analysis procedures (91). Moreover, the finite element discretization of the fluid permits consideration of completely arbitrary geometries in either two-dimensional analyses of gravity dams or in three-dimensional arch dam studies (92). The incompressible fluid merely contributes an added mass term to each reservoir interface node of the dam idealization, and the response is determined by the standard dynamic analysis procedure described above. In fact, the Westergaard approach is seen to be merely a special case of a general method which accounts for hydrodynamic interaction between an incompressible fluid and any type or configuration of structure (93).

In contrast to this concept, a number of investigators have considered the reverse situation – taking account of the compressibility of the water but treating the structure as rigid (94, 95, 96). Their studies dealt with a two-dimensional idealization of a gravity dam-reservoir system; and although they obviously did not represent the fluid-structure interaction, they did demonstrate the important influence that compressibility of the reservoir water might have on the dynamic response behavior. Following this type of development, the next step was to provide a single degree of freedom for the dam structure, thereby defining a true (but limited) fluid-structure interaction problem in which both components of the system deform elastically (97). The single degree of freedom provided to the structure in this study was in the shape of the first mode of vibration of the dam without reservoir. Finally, a general two-dimensional dam-fluid interaction analysis was formulated merely by extending this procedure (98), representing the dam deflection as the sum of any number of modal coordinates and thereby achieving any desired degree of precision in the analysis.

et depuis quelques années celles-ci font l'objet de recherches.

Un progrès important pour l'étude de l'interaction hydrodynamique réside dans la représentation de l'eau stockée au moyen de la méthode des éléments finis. Supposant l'eau incompressible, le calcul de l'interaction d'un ouvrage souple et de l'eau peut se faire au moyen des techniques ordinaires d'analyse dynamique (91). De plus, la discrétisation du fluide permet des géométries tout à fait quelconques (calcul bidimensionnel des barrages-poids, calcul tridimensionnel des barrages-voûtes) (92). L'effet de fluide non-compressible consiste simplement à ajouter une certaine masse à chaque nœud de contact barrage-eau, le comportement étant déterminé par le calcul dynamique ci-dessus. On peut dire que la technique de Westergaard n'est qu'un cas particulier de la méthode générale, qui tient compte de l'interaction hydrodynamique entre un fluide incompressible et un ouvrage de dispositions quelconques (93).

Plusieurs chercheurs ont étudié une approche contraire – l'eau est compressible et l'ouvrage rigide (94, 95, 96). Ces études ont porté sur un modèle bidimensionnel de barrage-voûte avec son réservoir. Bien que l'interaction fluide-ouvrage ne fût pas représentée, ces études ont néanmoins mis en évidence la grande influence possible de la compressibilité de l'eau sur le comportement dynamique. Toujours dans le même ordre d'idée, la prochaine étape fut de prévoir pour le barrage, un seul degré de liberté; on définit ainsi une réelle interaction (quoique limitée), les deux éléments présentant une déformabilité élastique (97). Dans cette étude, le degré de liberté unique de l'ouvrage correspondait à un premier mode de vibration du barrage seul (sans réservoir). Enfin on a abouti à une méthode de calcul bidimensionnel généralisé par simple extension (98). Dans ce calcul, les déplacements du barrage correspondent à la somme de ceux de nombre quelconque de coordonnées modales, permettant d'obtenir la précision que l'on désire.

This procedure, which represents the final reservoir interaction development, is a substructure technique very similar in concept to that described above for analysis of foundation-structure interaction. Again it is desirable to represent the dam as a finite element idealization which can account for any geometric form; the fluid constitutes the other substructure, and it is conveniently treated by the classical continuum wave equations. The equations of motion of the finite element model of the dam monolith may be expressed as :

$$\underline{M}\ddot{\underline{a}} + \underline{C}\dot{\underline{a}} + \underline{K}\underline{a} = -\underline{M}\underline{r}\ddot{v}_g(t) + \underline{R}(t), \quad [31]$$

which is similar to equation 13 but including the additional hydrodynamic force vector $\underline{R}(t)$. This represents the effect of hydrodynamic pressures acting on the face of the dam, and is nonzero only for the components of the interface node forces acting in the direction normal to the dam face; interaction is neglected for nodes at the bottom of the reservoir. It should be noted that the mass matrix includes no added mass of the reservoir in this formulation; the interaction is entirely contained in $\underline{R}(t)$.

Although classical vibration modes do not exist for the dam when hydrodynamic interaction effects are included, the normal modes of the dam without reservoir interaction can still be used to advantage in describing the dynamic response of the structure with interaction. Thus, expressing the displacement vector by the truncated modal expansion of equation 18, where the mode shapes now are those of the dam without water, equation 31 can be transformed as follows :

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\underline{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} \dot{\underline{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \underline{Y} = -\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{r} \ddot{v}_g(t) + \underline{\Phi}^T \underline{r}(t), \quad [32]$$

the reservoir-dam interaction analysis, like the corresponding foundation-dam interaction problem, is best carried out in the frequency domain. Hence, the response to harmonic ground acceleration $\ddot{v}_g(t) = e^{i\omega t}$ is determined first, leading to modal coordinate responses of the form $Y_n(t) = Y_n(\omega) e^{i\omega t}$, where $Y_n(\omega)$ is the complex frequency response function. Similarly, after expressing the interaction hydrodynamic forces as a series

Cette technique, l'aboutissement du problème d'interaction hydrodynamique, s'apparente aux techniques des sous-ensembles. Elle est très voisine de celle décrite ci-dessus (interaction barrage-fondation). Il reste toujours préférable de représenter le barrage par un maillage d'éléments finis, permettant toute forme géométrique désirée. L'autre sous-ensemble est le fluide, que l'on traite commodément par les formules classiques relatives aux ondes en milieu continu. Pour le barrage monolithique en éléments finis, les équations de mouvement peuvent s'écrire :

équation voisine de l'équation 13, mais qui comprend en plus le vecteur de force hydrodynamique $\underline{R}(t)$. Ce terme représente l'action des pressions hydrostatiques appliquées contre le parement amont; il est non-nul seulement pour les composantes des forces nodales d'interface qui sont dirigées normalement au parement. Pour les nœuds du fond du réservoir, on ne tient pas compte des interactions. Il faut noter que la matrice de masse ne comprend pas la masse d'eau ajoutée. En effet, l'interaction est entièrement dans $\underline{R}(t)$.

Bien que les modes classiques de vibration n'existent pas dans le barrage lorsqu'on tient compte des effets de l'interaction hydrodynamique, il est toujours intéressant d'utiliser les modes normaux du barrage seul (sans réservoir) pour l'étude du comportement dynamique sous l'effet de cette interaction. Ainsi, si le vecteur déplacement est exprimé au moyen de l'expansion modale tronquée de l'équation 18 (les formes modales étant celles du barrage seul sans réservoir), on peut re-écrire l'équation 31 :

Le calcul de l'interaction hydrodynamique (tout comme celui de l'interaction barrage-fondation ci-dessus) est effectué de préférence par domaine de fréquence. Par conséquent, on commence par la détermination de la réponse aux accélérations harmoniques du terrain ($\ddot{v}_g(t) = e^{i\omega t}$), pour aboutir aux réponses en coordonnées modales de forme $Y_n(t) = Y_n(\omega) e^{i\omega t}$ ($Y_n(\omega)$ = la fonction complexe de réponse aux fréquences).

of terms associated with the corresponding rigid body and modal acceleration components :

De même, les forces hydrodynamiques d'interaction étant exprimées sous forme d'une série de termes liés aux composantes correspondantes (milieu rigide, accélération modale) :

$$R(t) = R_0(t) + \sum R_n(t),$$

the amplitudes of these terms during harmonic excitation may be expressed as :

alors les amplitudes de ces termes pendant l'excitation harmonique peuvent s'exprimer ainsi :

$$R_0(t) = R_0 e^{i\omega t}; \quad R_n(t) = R_n(\omega) e^{i\omega t}.$$

Incorporating these expressions into equation 32, the complex frequency response relationship takes the form :

L'incorporation de ces formules dans l'équation 32 produit la relation suivante :

$$\underline{S}(\omega) \underline{Y}(\omega) + \underline{L}(\omega), \quad [33]$$

in which the generalized displacements are related to the corresponding generalized forces by the transfer function $S(\omega)$. Typical terms of $S(\omega)$ for the n th coordinate are :

(réponse complexe aux diverses fréquences). Dans cette équation, les déplacements généralisés sont liés aux forces généralisées correspondantes par la fonction de transfert $S(\omega)$. Les termes typiques de $S(\omega)$ pour la coordonnée n sont :

$$S_{nn}(\omega) = \underline{\Phi}_n^T \underline{M} \underline{\Phi}_n [-\omega^2 + 2i\omega\omega_n \xi_n + \omega_n^2] + \omega^2 \underline{\Phi}_n^T \underline{R}_n(\omega)$$

$$S_{nk}(\omega) = \omega^2 \underline{\Phi}_n^T \underline{R}_k(\omega)$$

$$\underline{L}_n(\omega) = -\underline{\Phi}_n^T \underline{M} r + \underline{\Phi}_n^T \underline{R}_0(\omega)$$

where $\underline{\Phi}_n$, ω_n , and ξ_n are shape, frequency, and damping respectively, for mode n of the dam without water. It will be noted that coupling terms between the modal components, $S_{nk}(\omega)$, are introduced in the transfer function due to the interacting water pressures.

dans lesquelles $\underline{\Phi}_n$ est la forme, ω_n la fréquence et ξ_n l'amortissement. Pour le mode n , barrage seul (sans réservoir). A noter que les termes de couplage des composantes modales $-S_{nk}(\omega)-$ sont introduits dans la fonction de transfert par suite des pressions d'interaction de l'eau.

The nodal force vectors $R_0(\omega)$ and $R_n(\omega)$ in equation 33 are the nodal resultants of corresponding hydrodynamic pressure distributions acting on the upstream face of the dam. These may be determined as solutions of the two-dimensional wave equation for appropriate boundary conditions of the reservoir, including harmonic motion of the upstream face. The complex frequency response $\underline{Y}(\omega)$ can then be obtained by solving equation 33 for an appropriate range of frequencies. Finally, the response to any arbitrary ground motion can be obtained by Fourier synthesis of the individual harmonic contributions, the analysis being performed economically by evaluating all Fourier integrals by the fast Fourier transform algorithm (99). Studies carried out by this procedure (98) have demonstrated the importance

Les vecteurs des forces nodales $R_0(\omega)$ et $R_n(\omega)$ de l'équation 33 correspondent aux résultantes nodales des contributions correspondantes des pressions hydrodynamiques appliquées sur le parement amont. On peut déterminer ces résultantes par résolution de la formule d'ondes bidimensionnelle pour des conditions aux limites du réservoir convenables (y compris la vibration harmonique du parement amont). On peut ensuite obtenir la réponse complexe $\underline{Y}(\omega)$ par résolution de l'équation 33 pour une gamme adaptée de fréquences. Enfin, on peut établir la réponse sous l'action de secousses quelconques par série de Fourier des contributions harmoniques élémentaires; la méthode la plus économique étant d'évaluer l'ensemble des intégrales de Fourier à l'aide de l'algorithme rapide de transfor-

of including the compressibility of the water in hydrodynamic interaction analyses; significant increases in peak stresses have been determined in typical gravity dams.

Similar substructure procedures can be employed in the study of reservoir-arch dam interaction, although the analysis is greatly complicated by the three-dimensional idealization which is required of both dam and reservoir. To date only one study of this type has been reported (100), which considered a highly simplified arch dam in the form of 90 degree segment of a cylinder, and a reservoir with vertical radial walls enclosing this 90° angle. An explicit solution of the hydrodynamic equations was obtained for this idealized fluid domain, and the structural response was approximated by a single mode of the structure without reservoir.

Although the results of this study are of limited scope, they demonstrate the importance of reservoir-arch dam interaction. A more general analysis probably can be obtained only by representing the reservoir water as a finite element model explicit solution of the wave equation for general reservoir boundary conditions does not seem feasible. As noted by Zienkiewicz (14), the finite element formulation can be extended to include the compressibility effect of the water, but at considerable computational expense, and little has been done in this direction to date.

Some similar work using a finite difference dam representation and a step by step response calculation is reported in 84 *b* and 100 *b*.

C.3.4. Combined hydrodynamic and foundation interaction

The preceding discussion was concerned separately with the dam-water system and the dam-foundation system. In each of these two cases, the impounded water and the foundation, respectively, modify the dyna-

mation de Fourier (99). Des études effectuées à l'aide de ce processus (98) ont démontré la très grande influence de la compressibilité de l'eau dans le calcul de l'interaction hydrodynamique. Par exemple pour les barrages-poids de type courant, on a trouvé de nettes augmentations des contraintes maximales dans ce cas.

Pour l'étude de l'interaction hydrodynamique en cas d'un barrage-voûte, on peut utiliser le même type de calcul par sous-ensembles, mais il est rendu bien plus complexe par la nécessité de représenter le barrage, ainsi que le lac, en trois dimensions. On n'a publié jusqu'ici qu'une seule étude de ce genre (100). Il s'agit d'une voûte extrêmement simplifiée (segment cylindrique de 90° d'ouverture) et d'un réservoir aux limites verticales disposées radialement au parement. On a obtenu une solution explicite des relations hydrodynamiques caractérisant ce domaine fluide idéalisé, la réponse structurale étant trouvée approximativement par un seul mode correspondant au barrage seul (sans réservoir).

Malgré leur portée limitée, les résultats de cette étude soulignent l'importance du phénomène d'interaction hydrodynamique dans le comportement du barrage-voûte. Il est probable qu'un calcul plus généralisé exigera la représentation de l'eau stockée par un maillage d'éléments finis. En effet, une solution explicite ne semble pas faisable pour des conditions généralisées aux limites du réservoir; Zienkiewicz a noté (14) que les formules peuvent en effet être élargies pour tenir compte de la compressibilité de l'eau, mais que l'effort de calcul correspondant est appréciable. Ainsi, on n'a pas poursuivi cette voie jusqu'ici.

Des études voisines, dans lesquelles le barrage est représenté par la technique des différences finies et qui repose sur le calcul pas à pas de la réponse de l'ouvrage, sont décrites dans les références 84 *b* et 100 *b*.

C.3.4. Interaction mixte (fondation et eau stockée)

Jusqu'ici on a traité séparément l'interaction du barrage avec sa fondation d'une part, et d'autre part avec l'eau stockée. Dans les deux cas, ces interactions modifient le comportement dynamique du barrage, et

mic properties of the dam and may significantly affect the response. However, the two problems actually are coupled and the results obtained by separate analyses will be invalid in a general case. There is need, therefore, to develop techniques for analysis of complete dam-water-foundation systems, studying the dynamic response and assessing the significance of effects of hydrodynamic and foundation interaction considered simultaneously.

This general problem has been examined in a recent paper (101) but the work is only exploratory. The substructure methods developed for dynamic analysis of dam-water system and dam-foundation systems are ideally suited for and extendable to analysis of the combined system. Such as extension for gravity dams is nearing completion, but a similar type of combined interaction analysis for arch dams clearly is not possible in the immediate future.

C.4. APPLICATION TO ENGINEERING PRACTICE

Analytical procedures for predicting the earthquake response of dams are important not only for the obvious function of designing new structures to be built in seismic regions; more important at the present time is evaluation of the safety of the hundreds of such structures already standing in areas of frequent earthquake activity. Most of these dams were designed using oversimplified concepts with respect both to the mathematical model of the structure and to the dynamic response mechanisms, and current analysis capabilities make possible a much more reliable estimate of their expected earthquake behavior.

The three basic steps in an analytical assessment of the seismic safety of either an existing or a proposed dam are as follows :

1. Estimation of the maximum expected earthquake excitation.
2. Analysis of the response to this dynamic input.
3. Comparison of predicted peak response with the strength and/or deformation capacity of the structure.

peuvent exercer une influence considérable sur sa réponse au séisme. Ces deux phénomènes sont liés dans la réalité, et les résultats obtenus par calcul séparé ne seront pas valables pour un cas généralisé. Il faut donc mettre au point des techniques de calcul de l'ensemble barrage-réservoir-fondation permettant d'étudier le comportement dynamique global et d'évaluer les effets des deux interactions agissant simultanément.

Ce problème généralisé fut étudié dans une publication récente (101) mais il s'agit seulement d'une investigation préliminaire. Les techniques des sous-ensembles ci-dessus sont très adaptées à cette étude d'ensemble et leur développement vers ce but est possible. Pour les barrages-poids, ce développement approche de sa conclusion, mais le calcul dynamique global dans le cas des barrages-voûtes n'est évidemment pas pour demain.

C.4. APPLICATIONS PRATIQUES

Les méthodes de prédiction du comportement sismique des barrages sont importantes, non seulement pour les projets de barrages à construire dans les régions sismiques, mais surtout, dans le contexte actuel, pour l'appréciation des conditions de sécurité des centaines de barrages existants dans les régions de séismes fréquents. Pour la plupart, ces ouvrages furent conçus au moyen de concepts trop simplifiés, tant sur le plan du modèle mathématique de l'ouvrage que sur celui des mécanismes dynamiques. Les possibilités actuelles du calcul dynamique permettent une estimation bien plus sûre du comportement prévisible du comportement sismique de ces ouvrages.

Les trois étapes essentielles dans l'appréciation analytique de la sécurité sismique d'un barrage existant ou futur sont :

1. Estimation de l'excitation sismique maximale escomptée.
2. Calcul de la réponse de l'ouvrage.
3. Comparaison des contraintes maximales ainsi déterminées avec la résistance mécanique ou la déformabilité (ou les deux) de l'ouvrage.

The selection of the design earthquake may well be the most important part of the total process, but that step is beyond the scope of this report. The principal concern here has been with methods for analysis of the dynamic structural response to any specified earthquake input, and it will be convenient now to discuss the practical application of these methods in engineering practice.

C.4.1. Summary of current analysis capabilities

Dynamic finite element analysis of a linearly elastic gravity dam section, including a segment of foundation rock to account for foundation-structure interaction and representing hydrodynamic interaction by the Westergaard added mass approach, may be considered the current state of the art of earthquake response analysis in engineering design offices. The more advanced offices also are prepared to treat the corresponding three-dimensional arch dam, and standard computer programs are available to carry out such analyses (102). The next step in concrete gravity dam analysis would appear to be the use of more refined continuum approaches to treating the interaction problems, such as were described above. Computer programs are available at present which include reservoir-dam or foundation-dam interaction (103, 104); however, the combined reservoir-dam-foundation interaction analysis is still in the research stage.

Equivalent advances in interaction analysis for arch dams have not yet been made; it appears that foundation interaction for arch dams must continue to be accounted for by including the foundations rock in the finite element model, and reservoir interaction by the added mass approach. The finite element formulation of the added mass term is a useful advance which is presently employed by some analysts. In this regard, it is interesting to note that the modified Westergaard procedure (described as the standard procedure above) has given good correlation with model study measurements of hydrodynamic interaction (105), of

Le choix du « séisme du projet » est peut-être l'étape la plus déterminante, mais il n'est pas du domaine du présent rapport, dont l'objectif essentiel concerne les méthodes dont on dispose pour le calcul structural dynamique en fonction d'un séisme donné. Il est utile d'examiner l'application pratique de ces méthodes dans le domaine de l'ingénieur.

C.4.1. Résumé des méthodes de calcul actuellement disponibles

Les calculs dynamiques par éléments finis d'un profil de barrage-poids en élasticité linéaire, avec reproduction d'une tranche de la fondation rocheuse pour tenir compte de l'interaction de celle-ci avec le barrage, et en tenant compte de l'interaction hydrodynamique au moyen de la technique de la masse ajoutée de Westergaard, peut être considéré comme la méthode généralement adoptée aujourd'hui pour l'étude du comportement sismique des projets de barrages actuels. En outre, les projeteurs plus avancés sont prêts à utiliser cette méthode pour le calcul tridimensionnel des barrages-voûtes, et ils disposent actuellement des programmes d'ordinateur nécessaires (102). Pour les barrages-poids, la prochaine amélioration semble être l'utilisation de milieux continus plus sophistiqués pour traiter les problèmes d'interactions (voir ci-dessus) on dispose actuellement de programmes d'ordinateur tenant compte des interactions réservoir-barrage et fondation-barrage (103, 104) mais le calcul complet (barrage-réservoir-fondation) est toujours l'objet de recherches.

On n'a pas apporté d'améliorations analogues au calcul des interactions dans le cas des barrages-voûtes. Il semble nécessaire de conserver la tranche de fondation en éléments finis pour étudier l'interaction à ce niveau, ainsi que la technique de masse ajoutée pour tenir compte de l'interaction hydrodynamique. L'introduction dans les équations du terme correspondant à cette masse ajoutée est un progrès utile actuellement adopté par certains projeteurs. A ce propos, il est intéressant de noter que la modification de la technique de Westergaard (la technique standard ci-dessus) donne une bonne corrélation avec les résultats expéri-

course, these correlations at model scale do not demonstrate that compressibility of the water can be neglected in the analysis of full scale structures because the reduced scale of the model distorts the behavior in this respect; however, they do demonstrate that the inertial effect of the water can be represented by a fairly simple model.

C.4.2. Non linear dynamic response

An important limitation of all the analytical methods discussed above is that they assume the structure to be linearly elastic. As was suggested in the earlier discussion of static analyses (Part B), it seems reasonable to design a concrete dam to resist the maximum expected loadings within the linear stress range of the material, and this condition should be imposed for dynamic earthquake loadings as well. However, this requirement does not ensure that the dam will behave linearly; for example, dynamic opening of the joints between monoliths of an arch dam would constitute a non linear mechanism. Moreover, in the safety evaluation of an existing dam, current seismic input requirements may induce stresses which greatly exceed the strength of the material, and this also would imply non linear performance. In principle, non linear analyses can be performed (106) to determine the dynamic response in such cases; but non linear dynamic analysis is considerably more expensive than non linear static analysis of the same structure, and is beyond the present state of the art in engineering practice. Moreover, it is very difficult to provide an adequate description of the non-linearity mechanisms in practical structures composed of real materials, so such analyses would have little significance in most cases even if the computer capability and funding were available.

The above comments pertain to unreinforced concrete structures, for which it may be reasonable to assume design stress levels that are in the elastic range. Earth dams, on the other hand, have highly non linear material properties even at low stress levels, including dynamic pore water pressure changes. To date no truly non linear analysis of the dynamic behaviour of earth

mentaux sur l'interaction hydrodynamique (105). Bien sûr il ne faut pas conclure d'après ces corrélations à l'échelle du modèle réduit, que le phénomène de compressibilité de l'eau peut être ignoré pour le calcul du prototype, car l'effet d'échelle perturbe le comportement à cet égard. Mais elles confirment la possibilité d'utiliser un modèle assez simple pour caractériser l'influence de l'inertie de l'eau.

C.4.2. Réponse dynamique non linéaire

Toutes les méthodes décrites comportent une sérieuse limitation. Elles supposent un ouvrage parfaitement élastique. Comme on l'a dit déjà (Partie B, calcul statique), il semble raisonnable d'étudier un barrage en béton pour résister aux charges maximales prévues dans le domaine de proportionnalité élastique — ce critère doit également s'appliquer au cas de charge dynamique. Mais ce critère n'assure pas un comportement linéaire. Par exemple, l'ouverture dynamique des joints entre monolithes (barrage-voûte) correspond à un mécanisme non linéaire. De plus, pour l'évaluation de la sécurité d'un barrage existant, les séismes de projet actuellement fixés peuvent produire des contraintes qui dépassent largement la résistance mécanique du matériau; ceci aussi implique un comportement non linéaire. En principe, on peut effectuer des calculs non linéaires (106) pour déterminer la réponse dynamique dans ces cas, mais le calcul dynamique non linéaire est beaucoup plus onéreux que le calcul statique non linéaire du même ouvrage. Il ne fait pas partie des outils actuellement utilisés par les projeteurs. En outre, il est très difficile de caractériser convenablement les mécanismes non linéaires qui interviennent dans les matériaux de construction réels, et pour cette raison, de tels calculs seraient d'une validité très limitée, même si l'on disposait des puissances d'ordinateur et des fonds nécessaires.

Les remarques ci-dessus concernent les ouvrages en béton non armé, pour lesquels il peut être raisonnable de supposer des niveaux de contraintes qui restent dans le domaine élastique. Par contre, les digues sont faites de matériaux présentant des caractéristiques fortement non linéaires, même pour les efforts de faibles valeurs (variations des pressions interstitielles dynamiques...).

dams has been attempted partly due to the difficulty of describing the constitutive material properties and partly due to computational cost difficulties. Attempts at representing the non linear aspects by modified linear analyses have apparently had some success (107, 111) but are clearly inadequate as permanent deformations or failure after a passage of an earthquake can not be so described.

As in general for both concrete and earth dams the earthquake load represents the most severe loading condition and as under such conditions failure must be avoided, it is obvious that a satisfactory non linear earthquake analysis presents a very important research problem of the future.

It appears certain that the dynamic behaviour of the material is not going to be satisfactorily described by static tests and once again here a challenge for further investigations is presented.

C.4.3. Seismic design criteria

An aspect of the dynamic response investigation which must be kept in mind is that the stress analysis results are no more important than the performance criteria which are used to assess the safety of the structure. Criteria which were used for evaluating gravity dam seismic analyses in the past were concerned mainly with sliding and overturning stability, but such considerations have little meaning in the context of a finite element stress analysis. The trial load arch dam analysis technique was considerably more refined than were typical gravity dam analyses, and it provided quite accurate estimates of the static load stress distributions. However, the equivalent static load procedure for representing seismic effects was not reliable, because it totally disregarded the dynamic nature of the earthquake input. Dynamic amplification effects as well as the oscillatory (positive-negative) aspects of the earthquake were ignored, thus the stress criteria which formerly were considered suitable for evaluating performance cannot be applied to the more precise results

Jusqu'ici on n'a pas tenté d'effectuer un calcul vraiment non linéaire du comportement dynamique des barrages en remblai, à cause de la difficulté de représentation des matériaux de construction, et du prix du calcul. Des tentatives de représentation des caractéristiques non linéaires par une modification du calcul linéaire semblent être partiellement réussies (107, 111) mais elles sont évidemment insuffisantes, car elles ne permettent pas de modéliser les déformations permanentes (ou la rupture) après le passage d'un séisme.

Le chargement sismique étant le cas de charge le plus sévère pour tous les barrages (béton et remblai) et la rupture dans ce cas étant obligatoirement interdite, il est évident que la mise au point d'une méthode convenable de calcul sismique non linéaire constitue une importante voie de recherche pour l'avenir.

Il semble certain que le comportement dynamique du matériau ne sera jamais caractérisé suffisamment bien par les essais statiques, et là encore, il y a une voie de recherche prometteuse.

C.4.3. Performances sismiques

Il ne faut pas oublier que les résultats des calculs ne sont pas plus importants que les critères de performance servant à l'appréciation de la sécurité de l'ouvrage. Les critères adoptés par le passé pour l'évaluation des calculs sismiques des barrages-poids concernaient principalement la résistance au glissement et au renversement, mais ces éléments ont peu de signification dans le contexte du calcul des contraintes par la méthode des éléments finis. À côté de ces calculs de barrages-poids, la méthode de la Trial Load pour barrages-voûtes était beaucoup plus fine, donnant une estimation assez précise de la répartition des contraintes provoquées par les charges statiques. La méthode pseudo-statique utilisée pour l'étude des effets sismiques par contre n'était pas fiable, car elle ignorait complètement la nature dynamique du séisme. On ne tenait pas compte ni des phénomènes d'amplification ni des phénomènes d'oscillation (positive-négative) et ainsi, les niveaux limités des contraintes autrefois considérés acceptables pour l'évaluation des performances ne sont

obtained by a dynamic finite element analysis.

It is important to note that the more refined analysis procedures invariably predict higher peak stress levels than are indicated by the former simple methods of analysis. This is because the refined methods are able to define stress concentration effects which previously were ignored, and also because the dynamic loads introduced by a major earthquake greatly exceed the equivalent static seismic loads that were prescribed by design specifications. In order to make proper use of these more precise analytical methods, it is necessary to adopt correspondingly refined performance criteria.

The comments made in Part B, to the effect that cracking is not necessarily a detriment in the static performance of a dam and that tensile stress limitations bear little relationship to the static safety of the structure, can be applied to some extent with respect to the seismic performance of the structure. Certainly cracks tend to limit the spread of tensile stresses, whether they are construction joints or the result of stress, and the structure may be perfectly stable in its cracked condition. Moreover, the tendency for cracks to propagate during seismic excitation is limited by the oscillatory nature of the stresses; peak stresses act only for a very short time and are followed immediately by stresses of opposite sign, so the transitory development of tensile stress may not be important.

On the other hand, the non-linearities associated with cracking of the structure may cause major changes in its dynamic behavior, and the short duration dynamic deformations may weaken it so that it is not capable of resisting the static loads which continue after the earthquake has ended. Moreover, it is very difficult to predict the non linear dynamic behavior of the structure after cracking, so its actual safety is very difficult to assess. For these reasons, it seems desirable to design concrete dams so that maximum tensile stresses during the maximum expected earthquakes do not exceed the actual tensile capacity of the material. Unfortunately, little data is avail-

plus valables par rapport aux résultats plus précis obtenus par le calcul dynamique par éléments finis.

Il faut remarquer que les méthodes plus fines donnent toujours des contraintes maximales plus élevées que les méthodes antérieures plus simples. C'est parce que les premières peuvent tenir compte des phénomènes de concentration des contraintes, autrefois ignorés, et aussi parce que les efforts dynamiques provoqués par un séisme majeur dépassent très largement les efforts sismiques pseudo-statiques fixés par le projecteur. Si l'on veut tirer le maximum de bénéfices de ces méthodes plus précises, il est nécessaire d'adopter des critères de performance d'autant plus avancés.

Les remarques formulées dans la Partie B (la fissuration ne compromet pas forcément le comportement statique du barrage; les limites imposées pour les tractions maximales admissibles n'ont que peu de rapport avec la sécurité statique) s'appliquent aussi dans une certaine mesure au problème du comportement sismique de l'ouvrage. Il est certain que la fissuration (joints de construction, fissures de traction) limite le développement des tractions, et l'ouvrage fissuré peut présenter une totale sécurité. De plus, la propagation des fissures au cours de l'excitation sismique est limitée par la nature oscillatoire des contraintes provoquées. En effet, la valeur maximale n'intervient que pendant un temps très court, étant suivie immédiatement par une contrainte de signe opposé. Ainsi, le phénomène de tractions transitoires est peut-être sans importance.

Par contre, les caractéristiques non linéaires provoquées par la fissuration peuvent modifier beaucoup le comportement dynamique de l'ouvrage; les déformations dynamiques très brèves peuvent aussi affaiblir l'ouvrage, le rendant inapte à supporter les efforts statiques qui continuent à agir après le passage du séisme. De plus, il est très difficile de prévoir le comportement dynamique non linéaire de l'ouvrage fissuré, et ainsi il est très difficile d'apprécier la sécurité. Pour ces raisons, il semble souhaitable de faire en sorte que les contraintes maximales en traction lors du séisme le plus sévère considéré ne dépassent pas la résistance réelle à la traction du matériau. Mais mal-

able at present about the combined stress capacity of mass concrete, especially when one or more components is in tension. For this reason it will be difficult to take full advantage of present dynamic analysis capabilities until further research is done on failure mechanisms of mass concrete.

heureusement, on dispose actuellement de peu de renseignements relatifs à la résistance mécanique globale du béton de masse, notamment lorsqu'il existe une ou plusieurs zones de traction. C'est pourquoi il sera difficile de tirer tous les bénéfices des possibilités actuelles du calcul dynamique, en attendant des recherches futures sur les mécanismes de rupture du béton de masse.

PART D

SOME RECOMMENDATIONS FOR FUTURE ATTENTION

D.1. GENERAL

In the preceding parts of this paper we have reviewed the general method of analysis and the current assumptions and techniques recommended. There are, however, still many areas of the subjects to which satisfactory answers do not exist at the moment. Some of these involve long – term research – others can be remedied by action taken on the basis of present day knowledge.

The classification of such aspects can be given under three separate headings – but considerable overlap exists between these. Thus we shall consider :

a) Improvements of technique of computation and formulation necessary for a more precise and economical approach.

b) Extension of understanding and determination of suitable data for the material behaviour and the nature of loads such as earthquakes.

c) Development of an acceptable and logical set of rules for design which are consistent with the accuracy of modern analysis.

The work involved in the second item overlaps with the activities of the Committees on “ Materials ” and “ Seismic aspects of Design ” and a strict demarcation of activities is difficult to achieve.

In general we would consider that for instance the determination of the form of material laws and the computation of effects of earthquakes on a structure fall within

PARTIE D

QUELQUES RECOMMANDATIONS CONCERNANT LES PROBLÈMES A ÉTUDIER

D.1. GÉNÉRALITÉS

Dans le présent document, on a examiné la méthode générale de calcul, ainsi que les hypothèses et les techniques actuellement recommandées. Mais il existe toujours des domaines obscurs. L'éclaircissement de certains de ces problèmes exige des études de longue haleine, mais pour les autres, on peut trouver le remède dans nos connaissances actuelles.

On peut classer ces problèmes sous trois rubriques (mais il y a un grand recouvrement entre elles) :

a) Les améliorations à apporter à la technique du calcul et à la formulation des problèmes en vue d'aboutir à des résultats plus précis et moins chers.

b) L'extension de nos connaissances sur le comportement des matériaux (notamment le béton,...) et la nature des efforts appliqués (par les séismes...). Détermination de données plus précises sur ces aspects.

c) La mise au point de consignes acceptables et rationnelles pour orienter les études de conception, compatibles avec la précision du calcul moderne.

Il faut noter que les études à effectuer sous la deuxième rubrique ci-dessus recouvrent en partie les tâches des Comités d'études « Matériaux » et « Aspects sismiques des études de projet ». Il est difficile de faire une distinction nette.

En général, nous pensons que, par exemple, la détermination de la forme des lois régissant le comportement des matériaux, ainsi que le calcul des effets, pour le bar-

our province while the provision of the necessary data of material behaviour and determination of suitable earthquake loads is the essential subject of the other Committees mentioned.

D.2. IMPROVEMENT OF TECHNIQUE

We have already mentioned the need for development of :

i) Better element representation of infinite foundation regions in both static and dynamic context.

ii) Need for an improvement of computation time for non linear solutions both in static and dynamic context.

iii) Need for simplified data preparation for analysis and graphics presentation of results.

Many other aspects of technique will doubtless be studied by researchers. Most of these are, however, linked with the improved understanding of structural behaviour and will be mentioned in the next section.

D.3. EXTENSION OF UNDERSTANDING OF BEHAVIOUR

While the techniques available permit the computation of most problems much research has to be devoted to a quantitative assessment of the general structural behaviour and the influence of various parameters of materials and load description. Some of the following areas of research need much further study. As the problems are of similar nature to those posed in parallel branches of engineering e.g. offshore structures, nuclear power stations, etc., such work could well benefit by research carried out elsewhere.

i) *Determination of a suitable static material model* or models for concrete, rock and soil which would be of a simple form and allow a reasonably accurate prediction of static deformation under working loads and collapse. The models should aim at describing the behaviour with a minimum number of measurable parameters. A study

rage, d'un séisme, se situent dans notre mandat; par contre, l'établissement des données relatives au comportement des matériaux, et la détermination des efforts induits par les séismes seraient essentiellement du domaine de ces autres Comités.

D.2. L'AMÉLIORATION DES TECHNIQUES

On a déjà mentionné qu'il faut :

1. Améliorer la représentation par éléments finis des régions infinies (fondation), dans le calcul aussi bien statique que dynamique.

2. Réduire le temps de calcul pour les problèmes non linéaires (calcul statique et dynamique).

3. Simplifier la préparation des données et présenter les résultats graphiquement.

Les chercheurs vont sans doute étudier bien d'autres aspects des techniques de calcul, mais la plupart de ces études est liée à la recherche d'une meilleure connaissance du comportement mécanique. On en parlera donc dans le paragraphe suivant.

D.3. L'EXTENSION DE NOTRE COMPRÉHENSION DU COMPORTEMENT

Si les techniques actuellement disponibles permettent le calcul de presque tout problème, il faut néanmoins un grand effort pour apprécier quantitativement le comportement mécanique global, l'influence de divers paramètres des matériaux, et la caractérisation des efforts. Certains des domaines ci-dessus exigent un grand effort de recherche. Ces problèmes étant analogues à ceux posés dans différentes disciplines parallèles (ouvrages offshore, centrales nucléaires...), on pourrait peut-être profiter des recherches effectuées dans ces domaines.

1) *Mise au point de modèles statiques* des matériaux (béton, rocher, remblai) de forme simple, permettant la prédiction assez précise des déformations statiques en service, et de la rupture. Ces modèles doivent reproduire le comportement du matériau, moyennant le nombre minimal de paramètres mesurables. Cette étude doit déter-

of this nature needs to determine computationally the influence of various parameters and descriptions to provide a guide to their importance.

ii) *Determination of a suitable dynamic material model* which could be used for seismic calculations. This model would have to obey a similar specification as (i). However here it is important to determine to what extent *rate of straining* affects material properties and whether such phenomena as *liquefaction* need a separate description or whether (as some suspect) are a natural consequence of properly determined static drained properties.

iii) *Determination of the importance of fluid compressibility on the dynamic performance of dam – reservoir systems.* A clear guidance to the nature of error committed by the neglect of compressibility needs to be provided for the designer.

iv) *Determination of the effect of various boundary conditions* imposed within the foundation during earthquake studies so as to properly model radiation damping effects.

v) *Determination of short duration equivalent earthquake shocks* which would permit an adequate study of responses in non linear cases. This is much needed as long period computation of non linear responses is very costly and the statistical nature of the input data seldom justifies such cost.

vi) *Determination of bound type solutions* which by a simplified calculation will permit a reasonably close prediction of collapse or maximum deformation. In a sense all the previous parametric studies have the same aim – i.e. that of providing an adequate answer using a limited number of parameters – but as is well known that for instance in soil mechanics quite reasonable predictions of collapse loads can be assumed directly by limit considerations. An extension of such simplified approaches and the study of dynamic action is important.

miner, par le calcul l'influence des divers paramètres afin d'évaluer le « poids » de chacun.

2) *Mise au point d'un modèle dynamique* pour les matériaux, en vue des calculs sismiques. Ce modèle doit répondre aux mêmes critères que ci-dessus, mais il est important de connaître l'influence sur le comportement de *la vitesse d'application des déformations* il faut également voir si certains phénomènes (liquéfaction...) exigent une caractérisation individuelle, ou si (comme certains le croient) ceux-ci sont la conséquence naturelle des caractéristiques statiques à l'état drainé.

3) *Détermination de l'influence de la compressibilité des fluides sur les performances dynamiques d'un barrage avec son réservoir.* Le projeteur a besoin d'informations précises sur les erreurs introduites par la non-prise en compte de ce phénomène.

4) *Détermination de l'influence de diverses conditions aux limites* imposées dans la fondation pour le calcul sismique, afin de reproduire le phénomène d'amortissement radial.

5) *Détermination de secousses équivalentes de courte durée* permettant l'étude des ouvrages non linéaires. Cette détermination est impérieuse tant que le calcul périodique du comportement non linéaire reste si coûteux et non justifié par l'imprécision statistique des données de base.

6) *Détermination de solution du type « enveloppe »* permettant, à l'aide d'un calcul simple, une prédiction assez précise de la rupture ou de la déformation maximale. Dans un certain sens, l'ensemble des études paramétriques ci-dessus ont le même but – de permettre des résultats suffisamment précis à l'aide d'un nombre limité de paramètres. Mais on sait que, dans le domaine de la mécanique des sols par exemple, on peut raisonnablement prévoir la charge à la rupture sur la base de conditions limites. La généralisation de telles approches simplifiées, tout comme l'étude des actions dynamiques, est très souhaitable.

D.4. ACCEPTABLE AND LOGICAL DESIGN RULES

Whilst the previous two sections were concerned with improvement of techniques for predictions of behaviour under *specified conditions of load and material behaviour* this one is concerned with the development of more consistent sets of rules than those at present available by which the acceptability of a design is judged.

The current practice is two fold. First, actual working conditions are investigated and performance of the dams under them is investigated and criteria of satisfactory behaviour checked. Second " safety factors " are determined to estimate the margin against failure.

In the first little allowance is given to the variability of material characteristics or other conditions which may occur in the working life. In the second a more serious difficulty of both defining and then assessing a suitable value to the safety factor exist. Clearly in all but exceptional static conditions the gravity and water load are not a variable and the safety factor normally implies some number reducing all the strength properties of the material in proportion. Such questions as those whether in a soil – rock context the cohesion C and angle of internal friction ϕ be reduced in the same proportion remain unanswered and present day definitions of safety of an earth dam give safety factors of the order 1.5-2 while similar considerations in an arch dam may result in number of 8-10. The logic of such vastly different values is not apparent to the practitioner or to the educated outsider who has experienced failures of both types of structures.

In the consideration of earthquake effects the situation though not precise is defined more logically. Here the structure is deemed to be safe if it can withstand without failure a certain maximum earthquake which is deemed possible.

D.4. CRITÈRES DE CONCEPTION ACCEPTABLES ET LOGIQUES

Les deux paragraphes ci-dessus concernent l'amélioration des techniques de calcul pour permettre de prévoir le comportement *dans le cadre d'un ensemble de conditions de chargement et de lois de comportement*. Dans le présent paragraphe, on passe à la mise au point de critères plus homogènes que ceux actuellement adoptés pour l'appréciation des performances d'un projet.

Actuellement, on adopte une approche double; on étudie les conditions réelles de service; on examine le comportement de l'ouvrage soumis à ces conditions; on vérifie la conformité du projet avec les critères d'acceptabilité; ensuite, on détermine les « coefficients de sécurité » traduisant la marge par rapport à la rupture.

Dans la première étape ci-dessus, on tient peu compte de la variation possible des paramètres (caractéristiques du matériau...) au cours de la vie utile de l'ouvrage. Dans la seconde étape, il y a un problème plus délicat. Celui de définir le coefficient et lui fixer une valeur convenable. Il est évident que, dans l'état statique, le poids propre et la charge hydrostatique ne peuvent pas varier (sauf conditions très exceptionnelles); ainsi le concept du coefficient de sécurité implique normalement une valeur numérique d'un facteur de réduction de l'ensemble des caractéristiques de résistance mécanique des matériaux. On ne sait pas si, dans un milieu mixte terre-enrochement la cohésion C et le frottement interne ϕ doivent être minorés dans des proportions égales – ainsi, avec la définition actuelle de la sécurité des digues en terre, on trouve des valeurs du coefficient de sécurité de l'ordre de 1,5 à 2; des méthodes identiques donnent pour un barrage-voûte, des valeurs de l'ordre de 8 à 10. Cette grande différence n'est pas logique et ne satisfait ni le projeteur ni l'homme de bon sens qui connaissent des exemples de rupture dans les deux types de barrage.

Lorsqu'on considère les effets sismiques, la situation – si elle n'est pas précise – est néanmoins définie plus rationnellement. On suppose que l'ouvrage présente une sécurité suffisante pour supporter, sans rupture, un séisme maximal donné considéré comme possible.

Such an approach at least makes an attempt to define what is possible – or probable and leads to the concept of *designing for the possibility of occurrence of certain undesirable effects in the structure*. A full probabilistic approach is not yet practical however in any structural field due to difficulties of a precise assessment of probabilities (and perhaps due to the psychological effects on the public of designs with certain, however small, probability of failure. However, many codes of practice of structural design (112) are now tending to introduce acceptable multipliers for such *causes* as :

- a) load uncertainty;
- b) material variability;
- c) ignorance of foundation conditions, etc.

These have to be applied to check the effects (behaviour) for both working and ultimate conditions. We strongly recommend that such an approach be investigated for dams and a unified appraisal procedure developed. Only if such a process is generally accepted can we be assured of a most logical economic comparison for dams of different types and function. Further, only then will it be possible to make full use of numerical analysis procedures to *design dams for optimum economy and safety*.

Cette approche au moins a le mérite d'essayer de définir ce qui est *possible* (ou probable). Elle conduit au concept selon lequel *le projet doit tenir compte de la possibilité de certains effets nuisibles*. Il n'est pas encore possible d'adopter une méthode totalement probabilistique (quel que soit le domaine d'ingénierie), par suite des difficultés que présente l'appréciation précise des probabilités numériques (il y a aussi peut-être l'effet psychologique pour le public de constater qu'un ouvrage comporte une probabilité de rupture, même infime). Cependant, on trouve aujourd'hui un bon nombre de codes qui tendent à introduire des *facteurs de multiplication* basés sur les *causes*, notamment :

- a) l'imprécision sur les charges appliquées;
- b) la variation des caractéristiques des matériaux;
- c) l'absence de renseignements sur les conditions de fondation, etc.

Ces facteurs ont été adoptés pour la vérification des effets (comportement) en service normal et à la rupture. Nous formulons la ferme recommandation d'examiner cette approche pour les barrages, conduisant à l'adoption d'une technique d'appréciation unifiée. C'est seulement l'adoption généralisée d'une telle technique qui pourra assurer la comparaison économique rationnelle des variantes de barrages (types, buts). De plus, c'est seulement à ce moment-là que l'on pourra profiter complètement des méthodes de calcul numérique dans le but d'*élaborer des projets de barrage à la fois économiques et sûrs*.

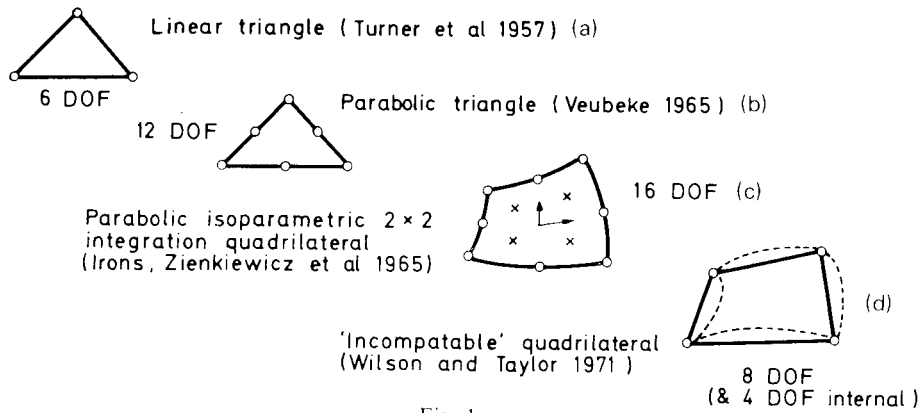


Fig. 1.

Useful two dimensional elements (19) - (22).

Éléments classiques utilisés pour les problèmes plans
(DOF = Degré de liberté).

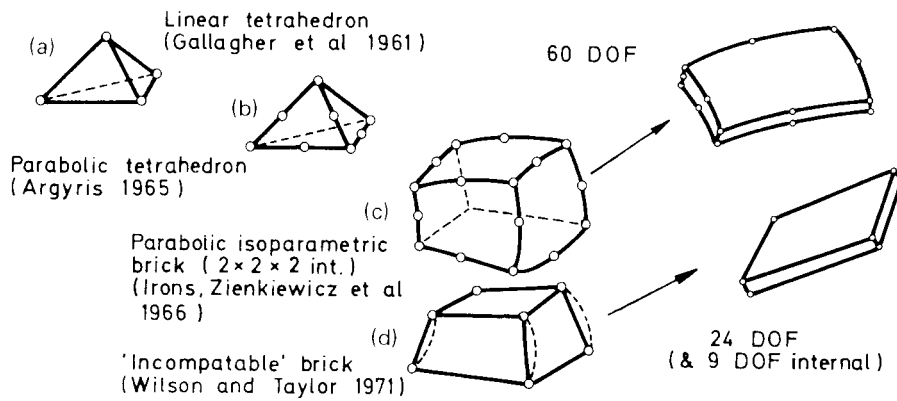


Fig. 2.

Useful three dimensional elements (22) - (25).

Éléments classiques utilisés pour les problèmes tridimensionnels.

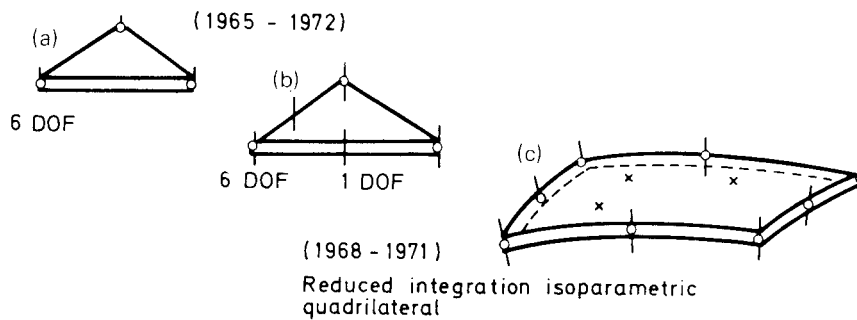


Fig. 3.

Useful shell elements (22) (26-30).

Éléments utiles utilisés pour les coques minces.

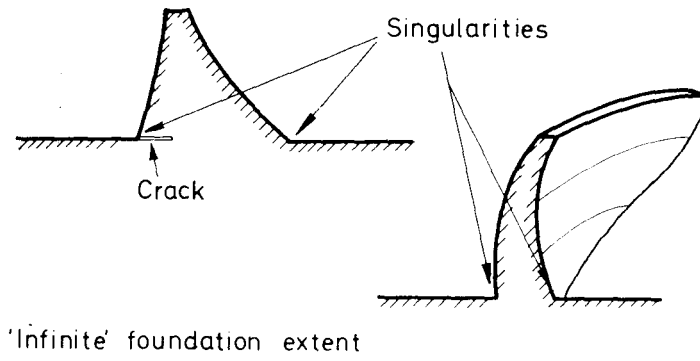


Fig. 4.
Some special problems in analysis.
Quelques problèmes spéciaux de calcul.

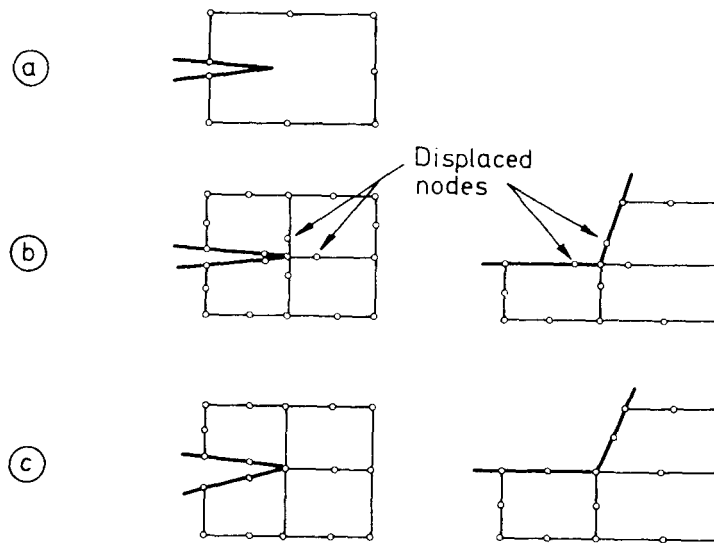


Fig. 5.
Some methods of treating singularities.
(a) Special "crack" element.
(b) Standard elements with "degenerate" node displacement.
(c) Standard elements with an additional function representing singularity in whole domain.

Des méthodes de traitement des particularités.
(a) *Élément spécial fissuré.*
(b) *Éléments ordinaires dégénérés à nœud central déplacé.*
(c) *Éléments ordinaires avec une fonction supplémentaire représentant une particularité dans l'ensemble du domaine.*

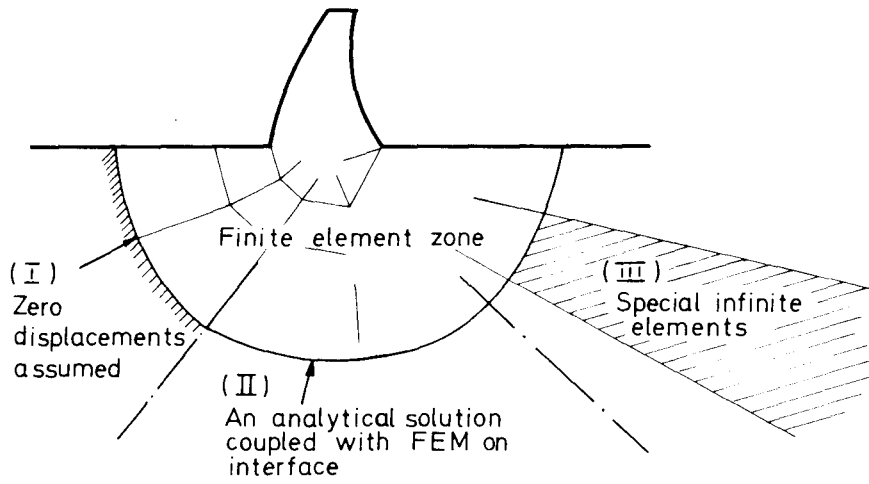


Fig. 6.

Possible treatment methods for "infinity".
Méthodes de traitement possibles de l'infini.

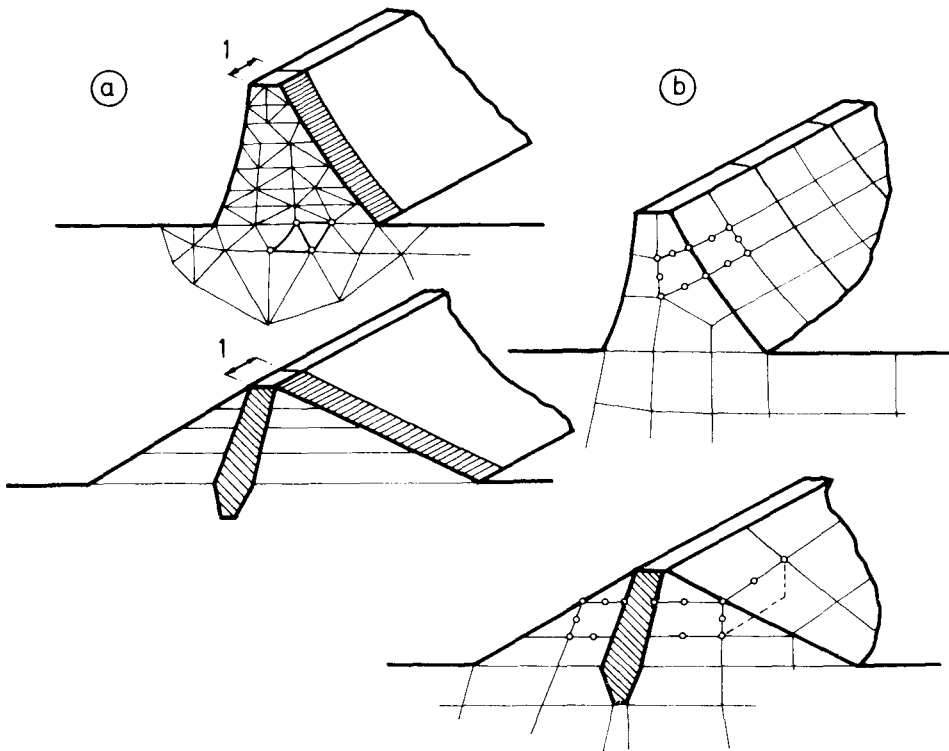


Fig. 7.

Some two and three dimensional idealizations
 and typical "linear" and "parabolic" meshes.
*Schématisations plane et tridimensionnelle
 et réseaux types linéaires et paraboliques.*

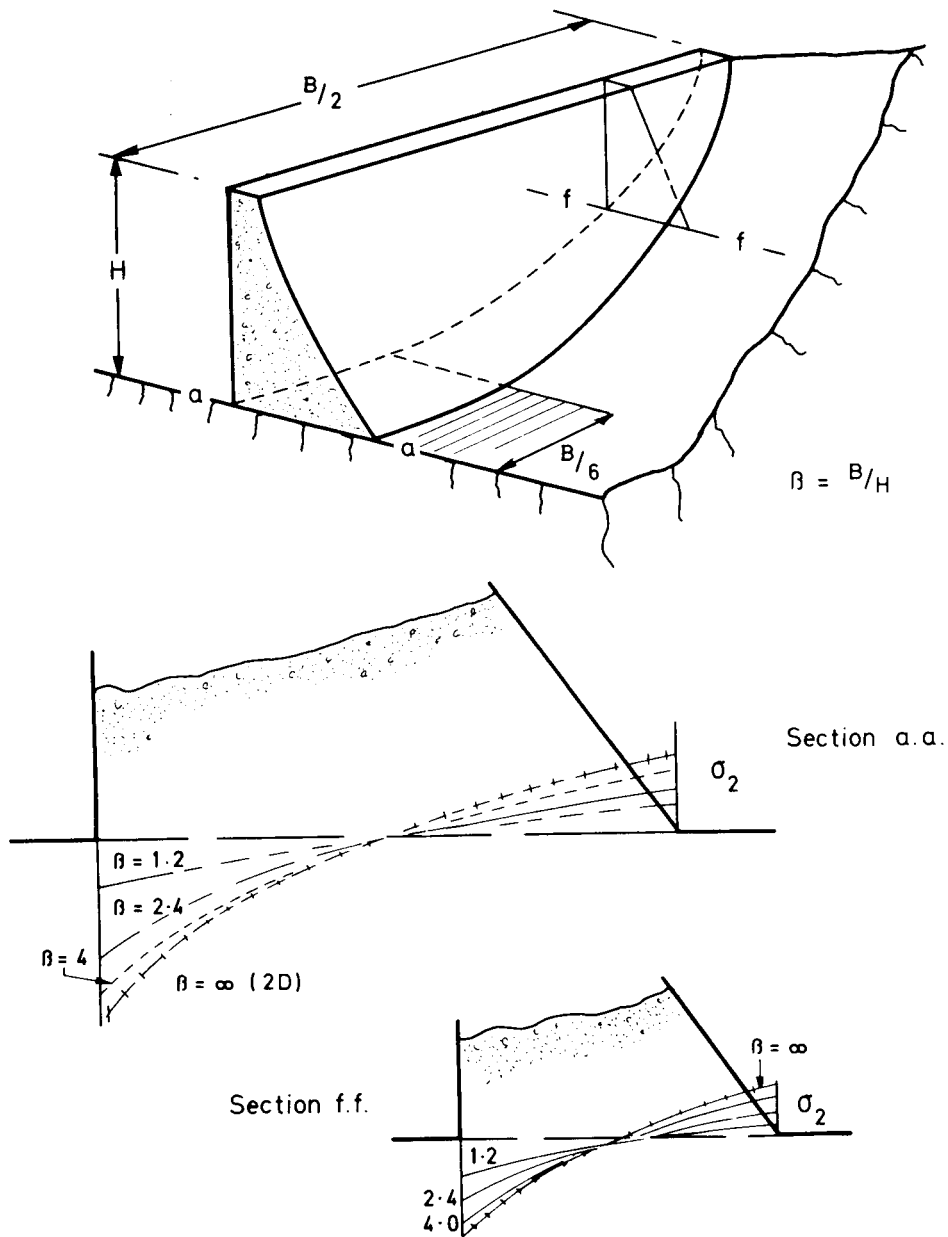
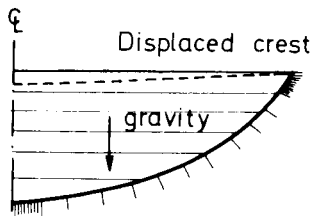
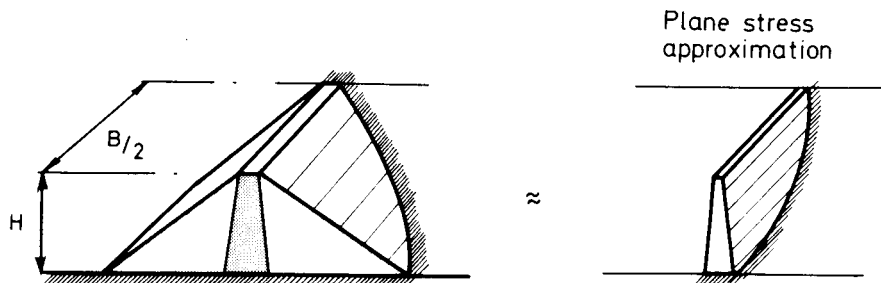


Fig. 8.

Effect of three dimensional action in a gravity dam $\beta = \infty$ represents two dimensional analysis vertical stress σ_2 on two sections of dam.

*Effet de l'action tridimensionnelle dans un barrage poids.
 $\beta = \infty$ représente le calcul en plan.
 Contraintes verticales σ_2 dans deux sections du barrage.*



2 - Dimensional model

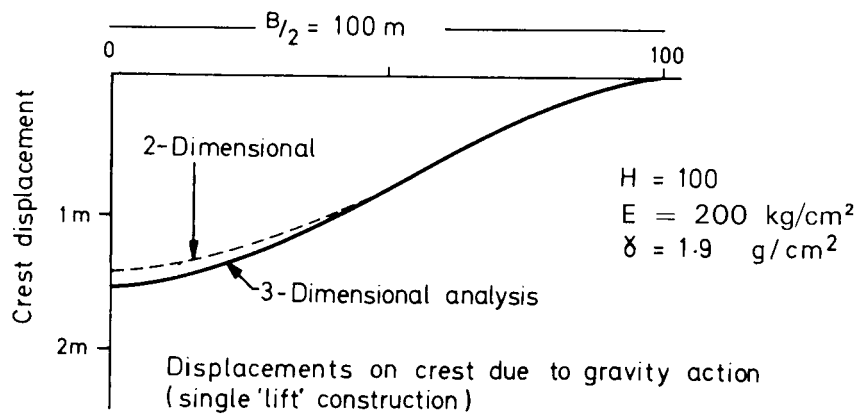


Fig. 9.

Another useful two dimensional approximation for gravity action in earth dams with rigid foundations ("Hang up" action) (Eisenstein et al. 1972).

Autre approximation utilisée pour l'effet poids dans les barrages en terre sur fondations rigides (Eisenstein et al. 1972).

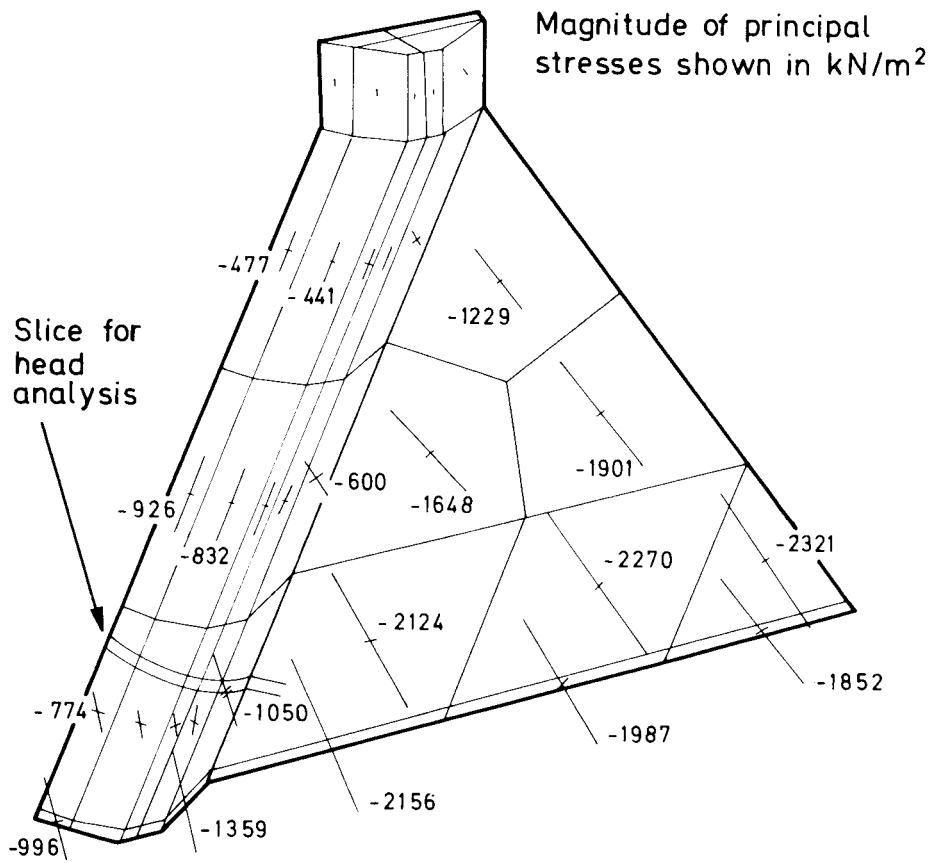
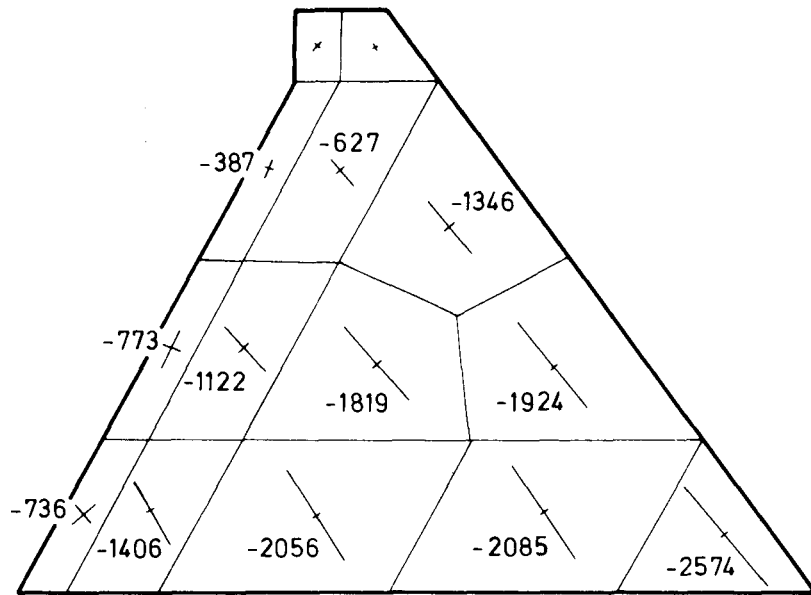
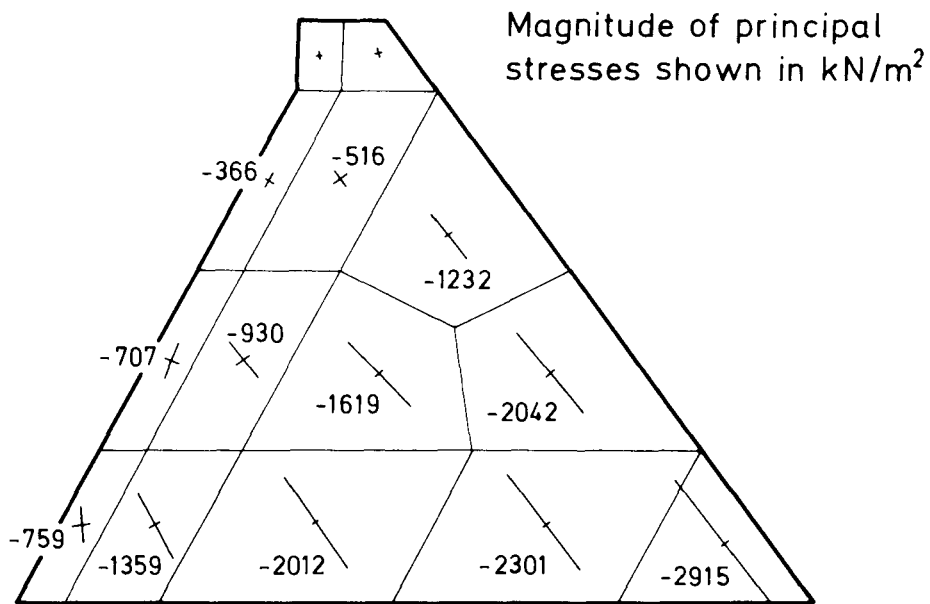


Fig. 10 a
 A buttress dam - 2 and 3 dimensional.
 Barrage à contrefort - 2 et 3 dimensions.



3D Analysis on ϕ



2D Analysis

Fig. 10 b

Principal stresses for buttress dam
under water and gravity loading.

*Contraintes principales dans un barrage à contreforts
sous l'effet de l'eau et du poids propre.*

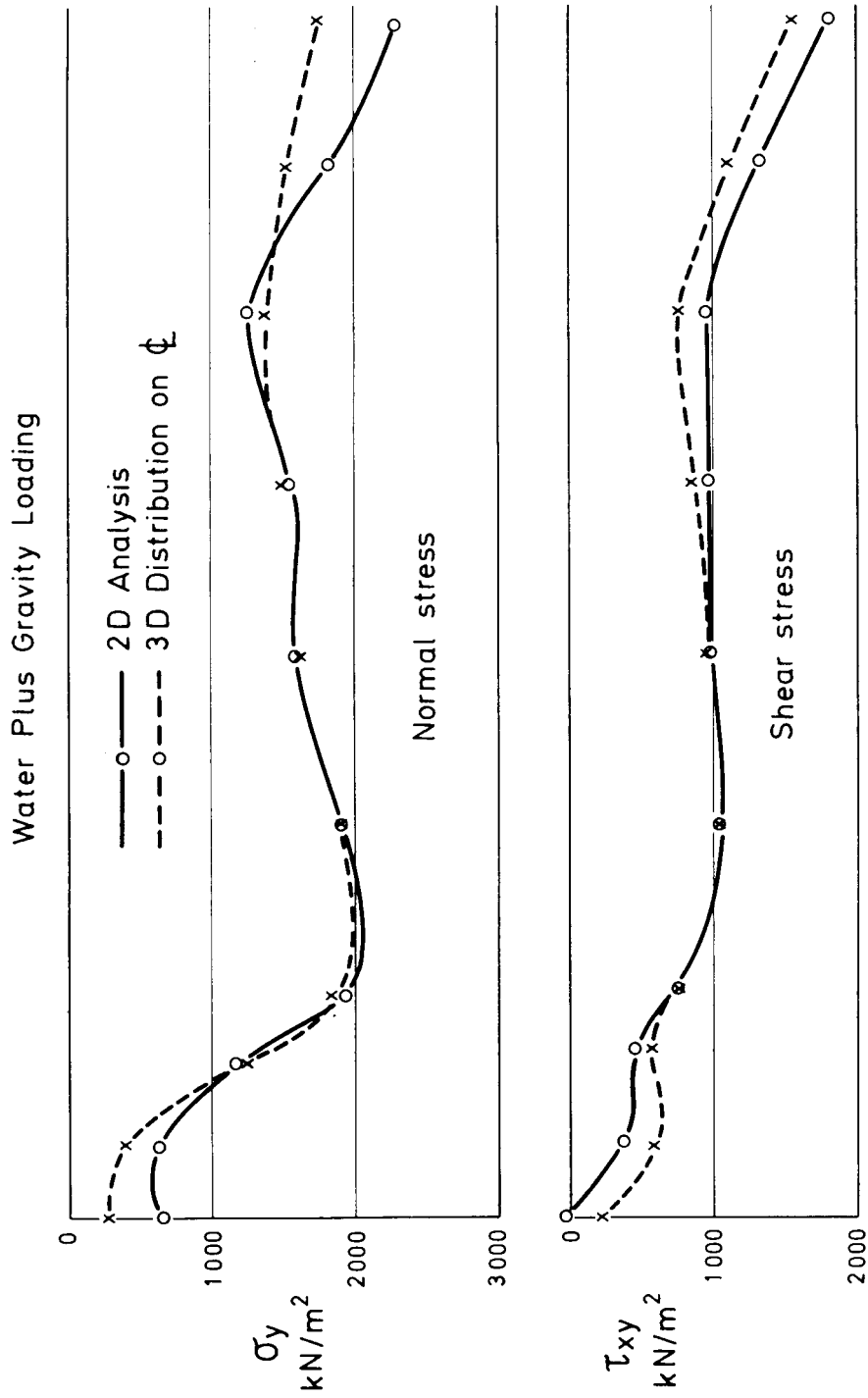


Fig. 10 c
 Stress distribution 1 m above the base of the buttress dam.
 Répartition des contraintes à 1 m au-dessus de la base d'un barrage à contreforts.

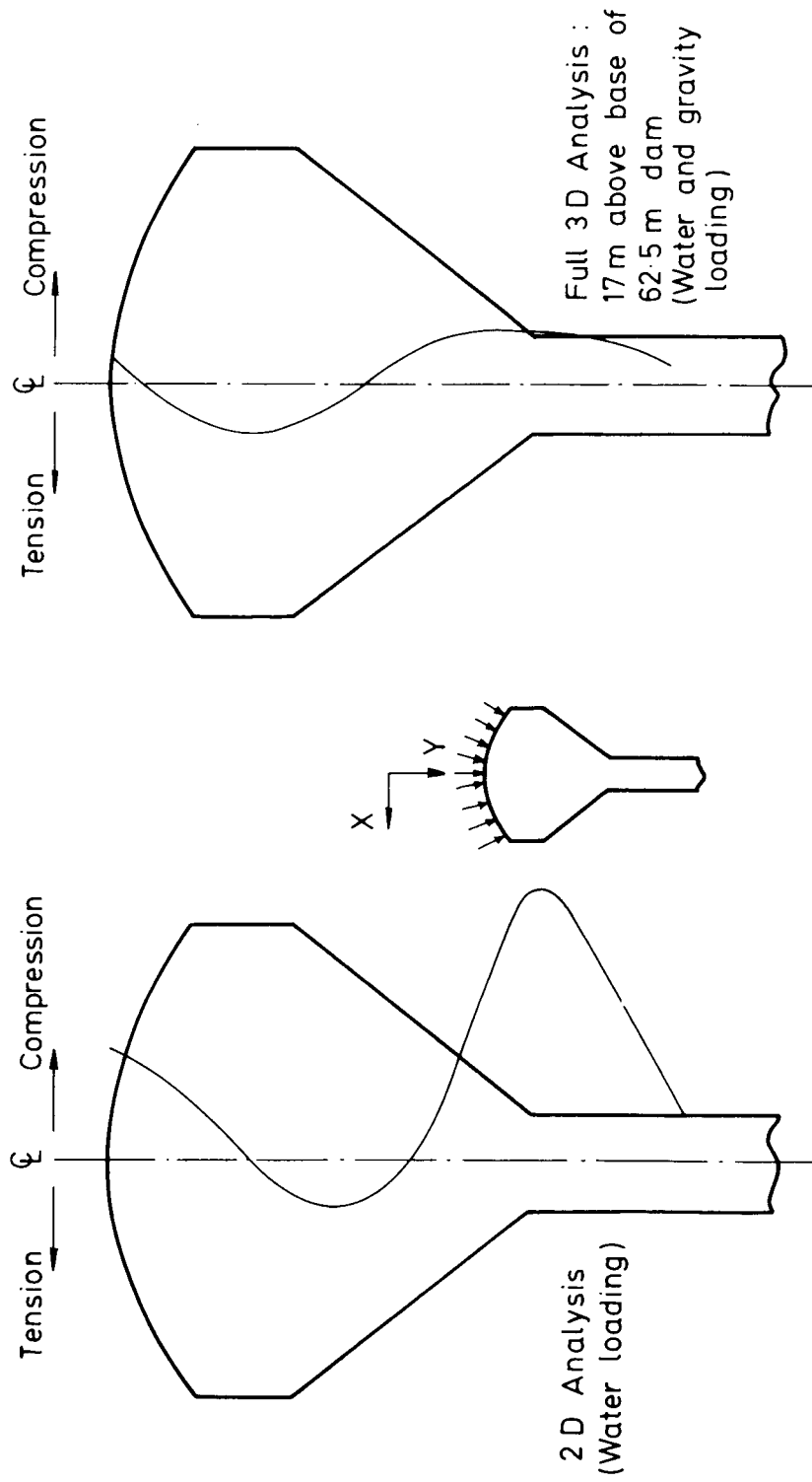


Fig. 10 d.

Distribution of horizontal stress (O_x) in round head buttress dam 2 D and 3 D analysis.
*Répartition des contraintes horizontales (O_x) dans un barrage à contreforts à tête ronde.
 Calculs à 2 et 3 dimensions.*

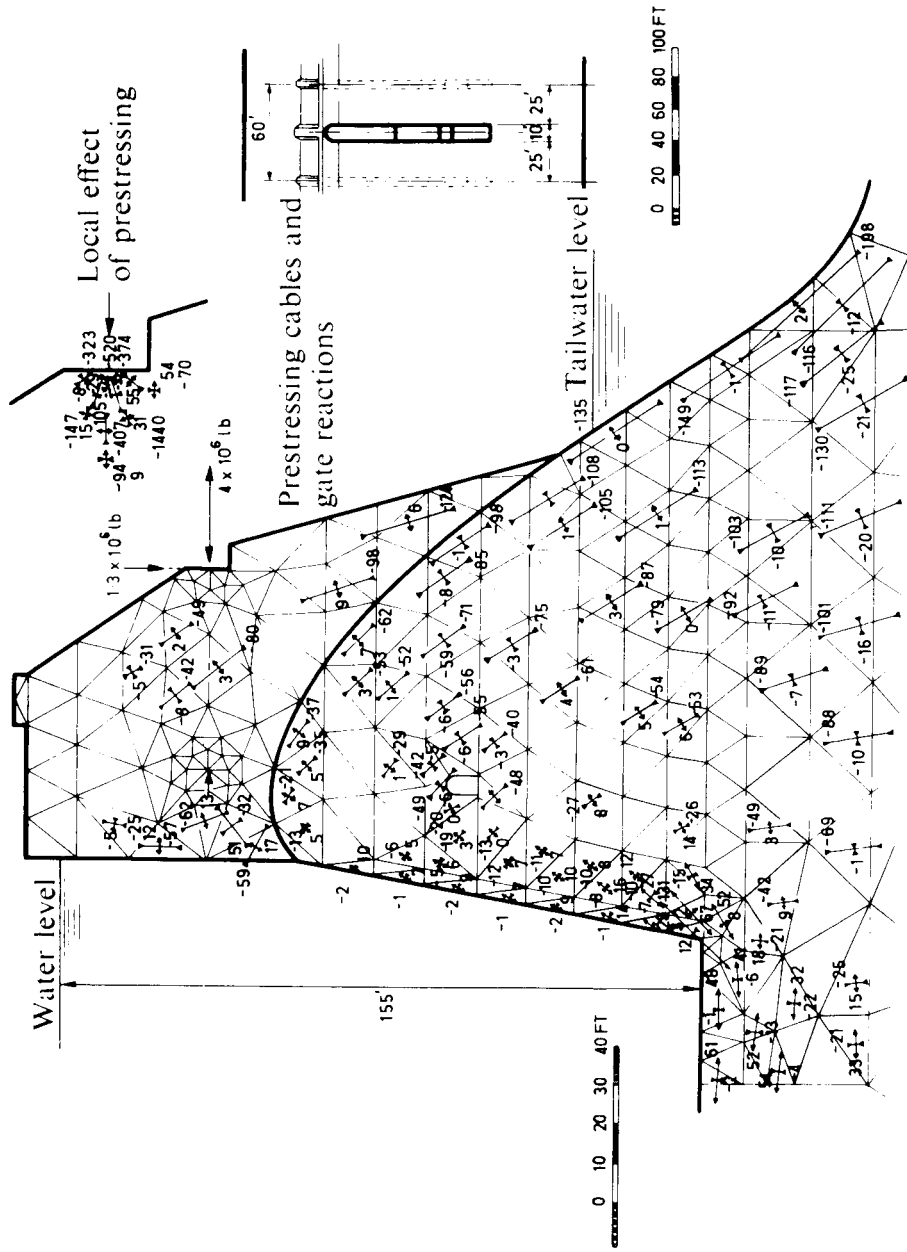


Fig. 11.

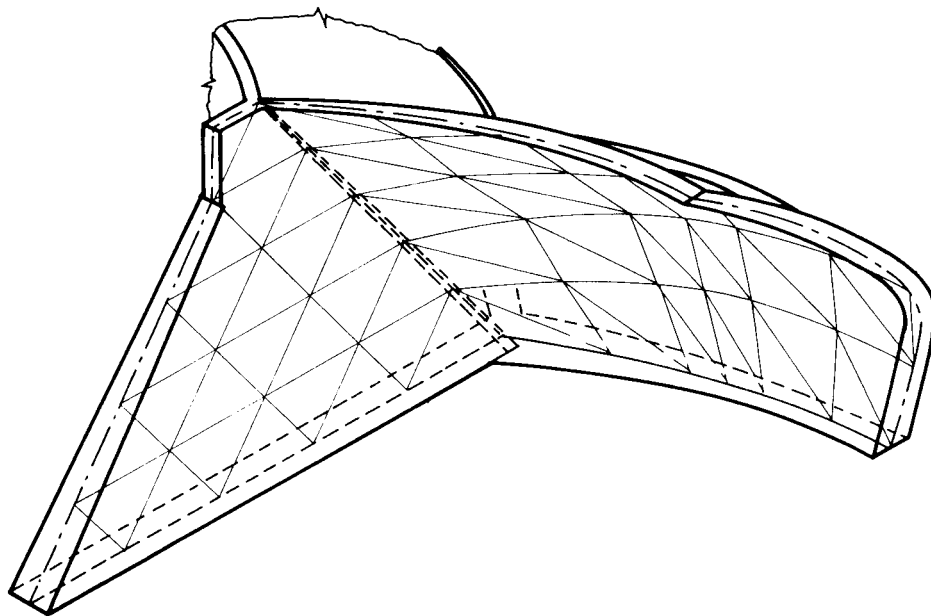
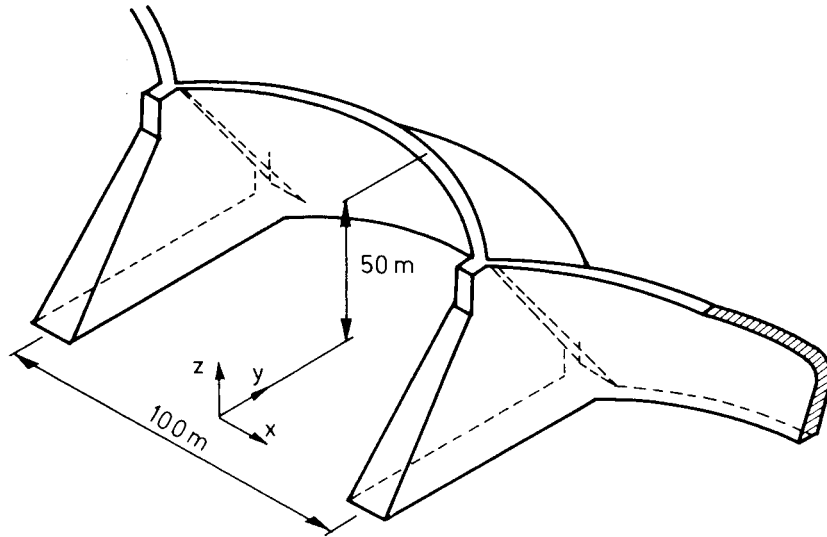
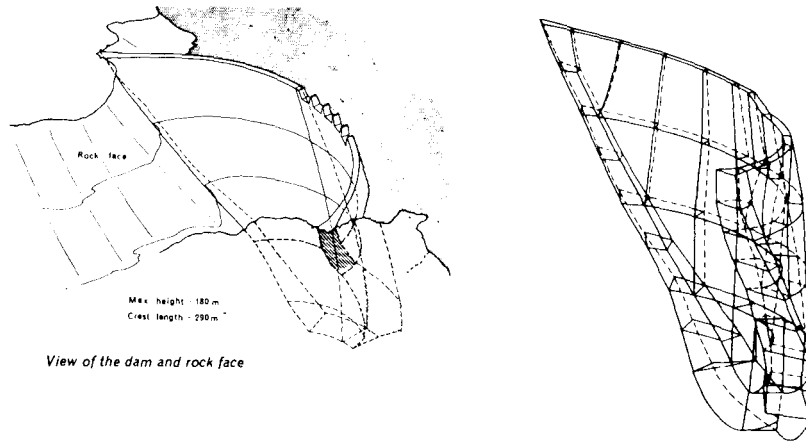


Fig. 12.
A shell type multiple buttress.
Barrage à voûtes multiples.



View of the dam and rock face

Isometric computer plot of the dam and exploded views

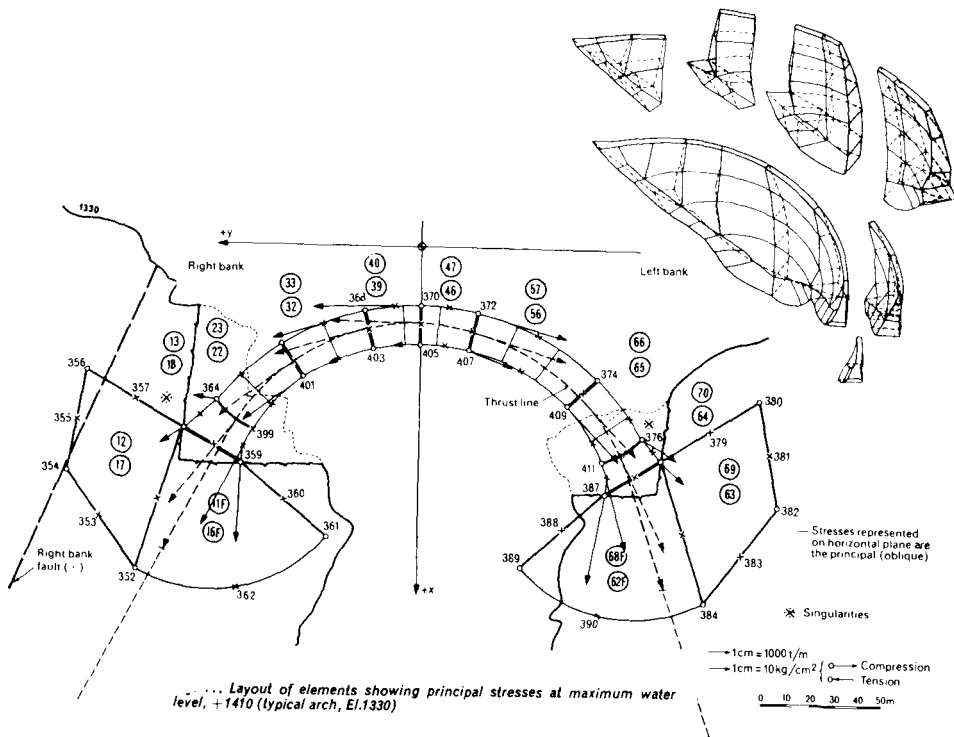


Fig. 13.
A typical arch dam analysis.
Calculs classiques d'un barrage-voûte.

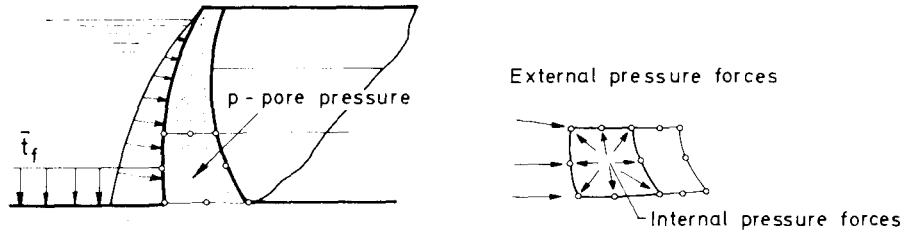


Fig. 14.

External and internal water pressure forces.
Pressions externes et internes de l'eau (p = sous-pression).

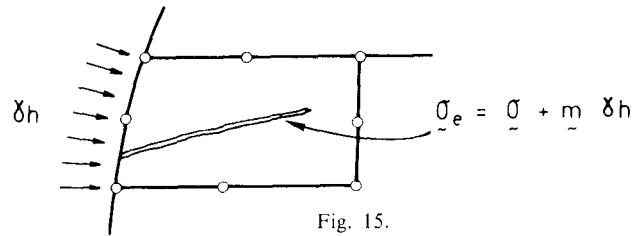


Fig. 15.

An impervious element with an open crack.
 Effective stress concept.
*Élément imperméable avec fissure ouverte.
 Pression efficace.*

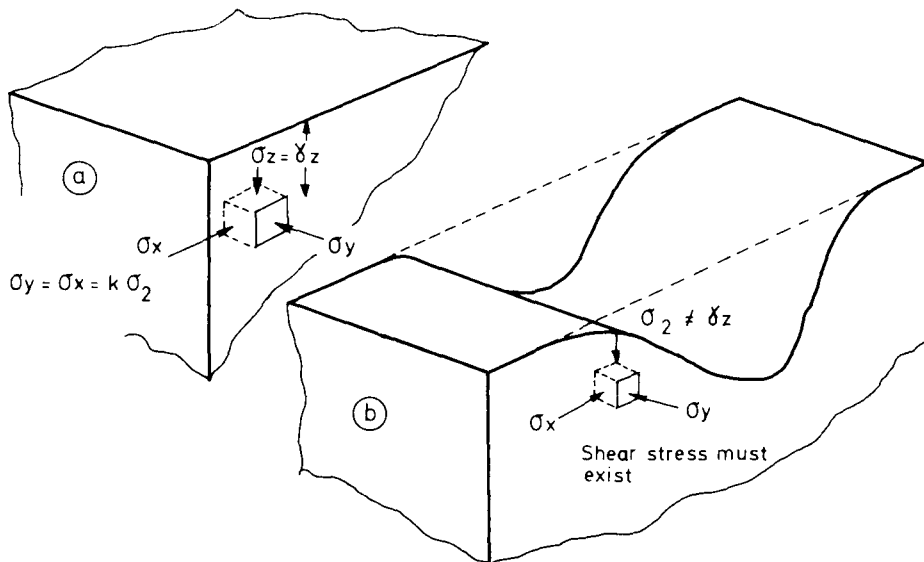


Fig. 16.

Initial rock stresses uniform
 (a) and non uniform (b) systems.
*Systèmes de contraintes initiales du rocher uniforme
 (a) et non uniforme (b).*

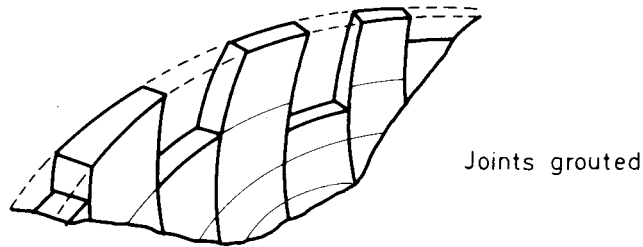


Fig. 17.

Role of construction sequence in gravity stress development arch dam.

*Effet des phases de construction dans l'effet du poids.
Barrage-voûte (joints injectés).*

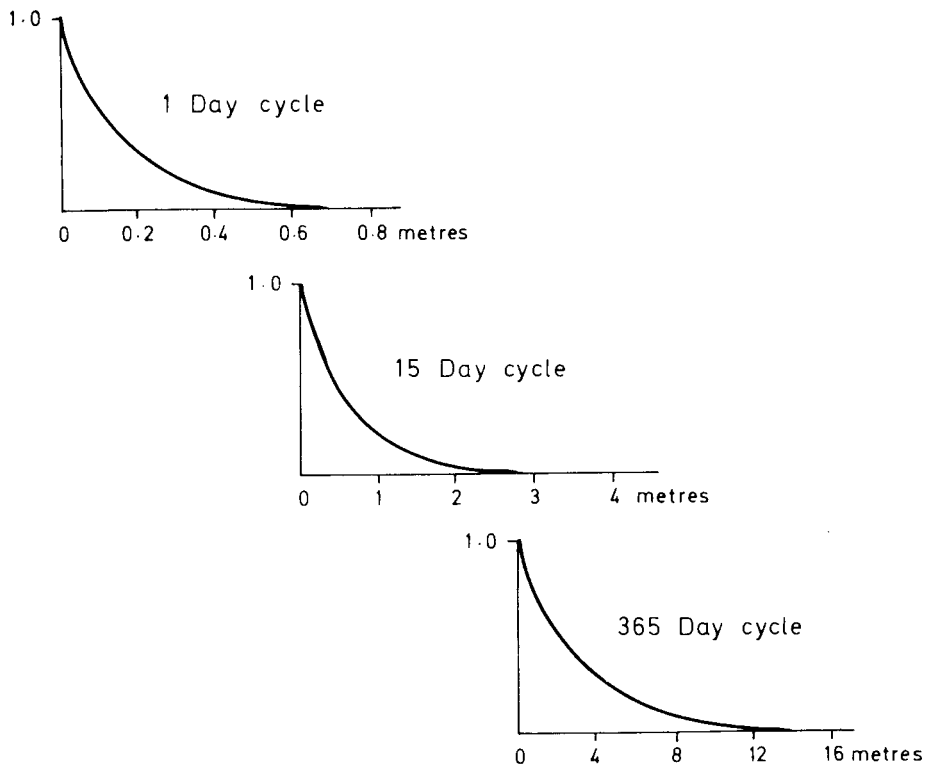


Fig. 18.

Decay of amplitude with depth for a periodic temperature applied to surface of concrete diffusivity = $K/c = 0.09 \text{ m}^2/\text{day}$ (Silveira 1961).
*Décroissance de l'amplitude avec la profondeur pour une variation périodique de la température appliquée à la surface du béton.
Coefficient de diffusion $K/c = 0,09 \text{ m}^2/\text{jour}$.*

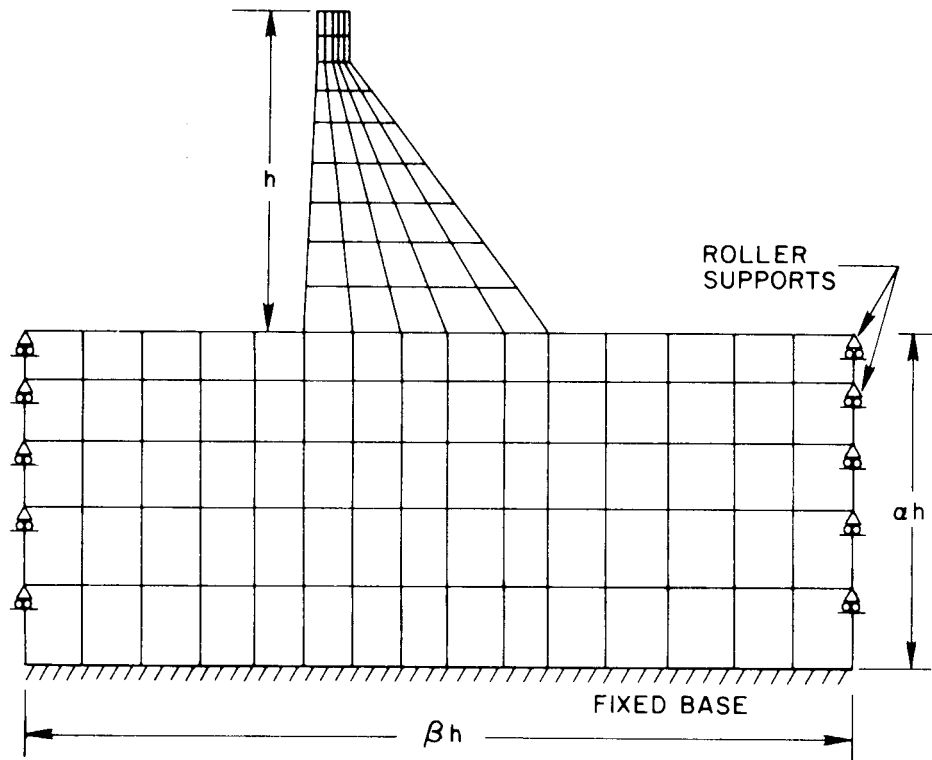


Fig. 19.

Finite element model of gravity dam
and foundation rock.

*Modèle aux éléments finis d'un barrage poids
sur fondation rocheuse.*

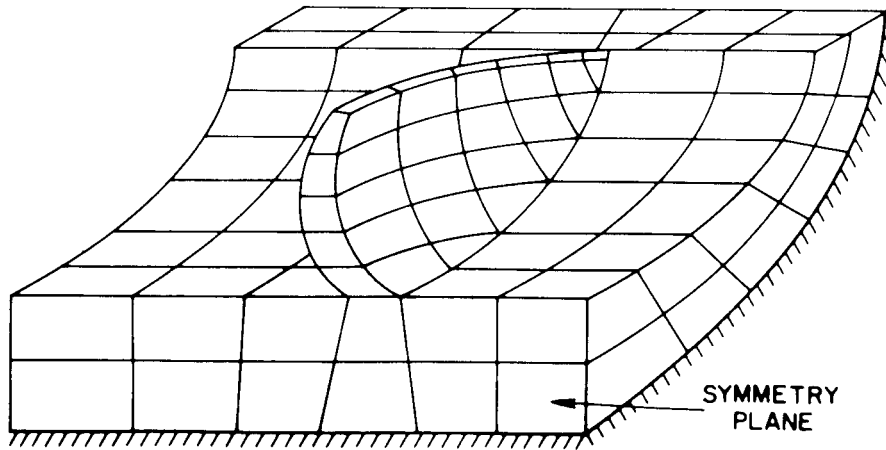


Fig. 20.

Symmetric half of arch dam
and foundation rock.

*Moitié symétrique d'un barrage-voûte
et de sa fondation rocheuse.*

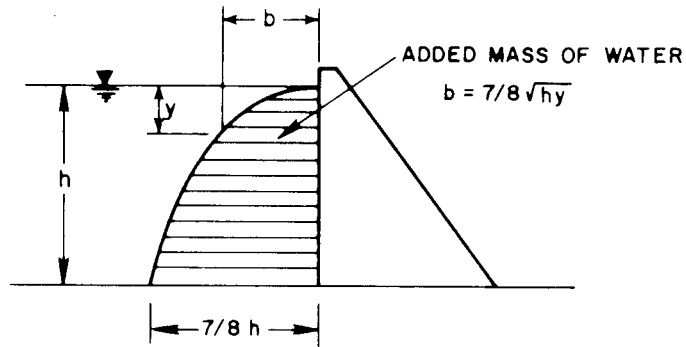


Fig. 21.

Westergaard's added mass of reservoir water.
Masse d'eau du réservoir ajoutée par Westergaard.

FREE-FIELD SYSTEM

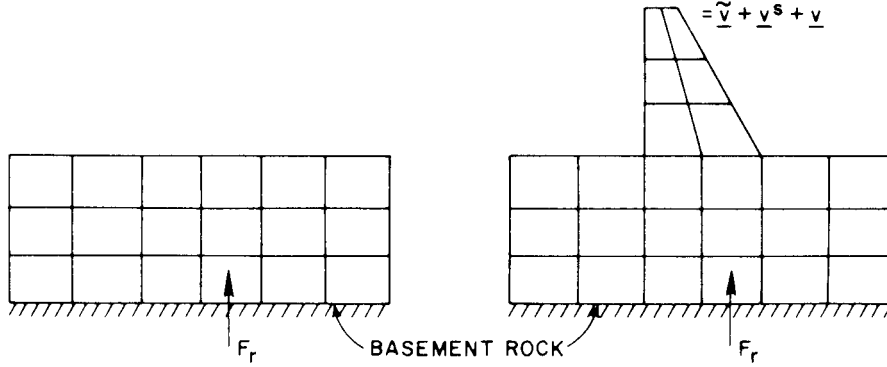
PROPERTIES: \tilde{m}
 \tilde{c}
 \tilde{k}

DISPLACEMENT: \tilde{v}

COMBINED SYSTEM

PROPERTIES: $\bar{m} = \tilde{m} + m$
 $\bar{c} = \tilde{c} + c$
 $\bar{k} = \tilde{k} + k$ } ADDED STRUCTURE

DISPLACEMENTS: $v = \tilde{v} + v^t$ { ADDED MOTION
 $= \tilde{v} + v^s + v$



SEISMIC INPUT: $F_r = \tilde{m}_r \dot{v}_g + \tilde{c}_r \dot{v}_g + \tilde{k}_r v_g$
(WHERE $\tilde{m}_r, \tilde{c}_r, \tilde{k}_r$ ARE COUPLING TERMS)

Fig. 22.

Formulation of free-field seismic excitation.
Excitation sismique en champ libre.

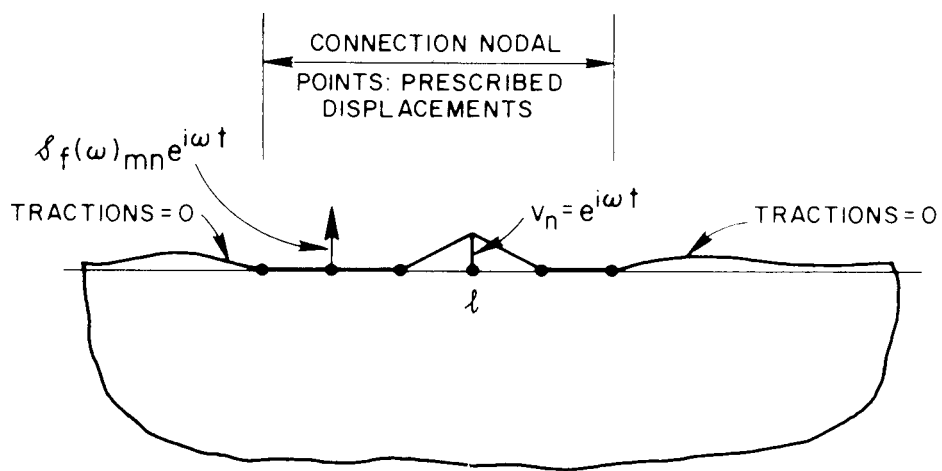


Fig. 23.

Physical interpretation of $f(\omega)$.
Interprétation physique de $f(\omega)$.

REFERENCES. PARTS A AND B

1. RICHARDSON, L. F., " The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with application to stresses and masonry dams ", *Phil. Trans, Roy. Soc. London* 210, p. 1909.
2. ZIENKIEWICZ, O. C., " The stress distribution in gravity dams ", *Jn. Inst. Civ. Eng.*, v, 244-71, 1946.
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and GERSTNER, R. W., " Foundation elasticity effects in gravity dams ", *Proc. Inst. Civ. Eng.* 19, 209-216, 1961.
4. ZIENKIEWICZ, O. C. and CRUZ, C. R., " The equivalent load method for elastic thermal stress problems with particular application to arch dams ", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 23, 15-34, 1962.
5. PRISCU, R. and CONSTANTINESCU, M., " Le calcul de barrages voûtes par la méthode de réseaux ", *Proc. 6th Int. Conf. Large Dams*, N. York. 1958.
6. SEVERN, R. and D. N. de G. ALLAN., *Proc. Inst. Civil Eng.*
7. RYDZEWSKI, J. ed., " Theory of Arch Dams ", *Proc. Symposium Southampton University*, 1964. Pergamon Press 1965.
8. CRUSE, T. A., " Application of the boundary integral equation method in solid mechanics ", Variational methods in Engineering, *Proc. Int. Conf.*, Southampton Univ. Press 1972.
9. CRUSE, T. A., " Numerical solutions in three dimensional elastic studies ", *Int. J. Sol. Struc.*, 5 1259-74 1969.
10. LACHAT, J. C. and WATSON, J. O., " A second generation boundary integral equation program for three dimensional elastic analysis ", *A.S.M.E. Conf. on Integral Equation. Methods*, N.York 23-5, June 1975.
11. RIZZO, F. I., " An integral equation approach to boundary value problems in classical elastostatics ", *Quart. Appl. Maths.* 25, 83-95, 1967.
12. GRANDALL, S. H., " Engineering Analysis ", McGraw-Hill N. York 1956.
13. FINLAYSON, B. A., " The method of weighted residuals and variational principles " Academic Press, N. York, 1972.
14. ZIENKIEWICZ, O. C., " The finite element method in engineering science ", MacGraw-Hill, 1967, 1971 and 1977, London.
15. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., " Introduction to the finite element method ", Van Nostrand-Reinhold, N. Y. 1972.
16. GALLAGHER, R. H., " Finite element analysis fundamentals ", Prentice-Hall 1975.
17. RUEBNER, K. H., " The finite element method for engineers ". J. Wiley & Son, N. Y. 1975.
18. GALLAGHER, R. H., TAYLOR, C., ODEN, J. T. and ZIENKIEWICZ, O. C., " The finite element method in flow problems ", J. Wiley & Son, London 1975.
19. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. and TOPP, L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero Sci.*, 23 805-23, 1956.
20. FRAEIJNS de VEUBEKE, B., " Displacement and equilibrium models in the finite element method ", Ch. 9, *Stress Analysis*, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, J. Wiley & Son, London 1965.
21. ERGATOUDIS, J., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis, " *Int. J. Solids Struct.*, 4, 31-42, 1968.
22. WILSON, E. L. and TAYLOR, R. L., " Incompatible displacement models Numerical and Computer Methods in Engineering ", *ONR Symposium*, U. of Illinois, 1971.
23. GALLAGHER, R. H., PADLOG, J. and BIJLAARD, P. P., " Stress analysis of heated complex shapes ", *A.R.S. Journal*, 700-707, 1962.
24. ARGYRIS, J. H., " Three dimensional anisotropic and inhomogeneous media; matrix analysis for small and large displacements ", *Ingenieur Archiv*, 34, 33-55, 1965.
25. ERGATOUDIS, J., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C., Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, *Symposium on Arch Dams Inst. Civ. Eng.*, London, 1968.
26. BASELEY, G. P., CHEUNG, Y. K., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Triangular elements in bending — conforming and non-conforming solutions ", *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
27. CLOUGH, R. W. and TOCHER, J. L., " Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending ", *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.

- 28a. RAZZAQUE, A., " Program for triangular bending element with derivative smoothing ", *Int. J.N.M.E.*, 6, 333-345, 1973.
- 28b. RAZZAQUE, A., and IRONS, B. M., " Shape function formulation for elements other than displacement models ", *Int. Conf. on Variational Methods in Engineering*, Southampton University 1974.
29. AHMAD, S., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Analysis of thick and thin shell structures by curved elements ", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 419-51, 1970.
30. ZIENKIEWICZ, O. C., TOO, J. and TAYLOR, R. L., " Reduced integration technique in general analysis of plates and shells ", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 3, 275-290, 1971.
31. HINTON, E. and CAMPBELL, J. S., " Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares methods, " *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 8, 461-80, 1974.
32. HINTON, E., SCOTT, F. C. and RICKETTS, R. E., " Local least square smoothing for parabolic isoparametric elements ", *Int. J.N.M.E.*, 9, 235-238, 1975.
33. SIMONCE, V., RICKETTS, R. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Three dimensional analysis of a multiple Arch Dam "
34. FAWKLS, A. J., " Some non-conforming variants of the trilinear isoparametric brick for linear elastic problems ", *M.Sc. Thesis*, University College Swansea, 1973.
35. TAYLOR, R. L., Private communication, Berkeley, U.S.A., 1974.
36. GALLAGHER, R. H., " Survey and evaluation of the finite element method in linear fracture mechanics analysis ", *Proc. Ist. Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Engineering*, 6, p. 637-48, Berlin,
37. BLACKBURN, W. S., " Calculation of stress intensity factor of crack tips using special finite element. The Mathematics of Finite Elements ", J. R. Whiteman (ed) Academic Press, 1973.
38. TRACEY, D. M., " Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors ", *Eng. Fracture Mech.*, 3, p. 755-66, 1971.
39. HENSHALL, R. D. and SHAW, K. G., " Crack tip elements are unnecessary "; *Int. J. Num Meth. Eng.*, 1975.
40. LEVY, N. and MARCAL, P. V., " Three dimensional elastic-plastic stress and strain analysis for fracture mechanics ", *Brown University report HSST-TR-17*, Nov. 1971.
41. BENZLEY, S. E., " Representation of singularities with isoparametric finite elements ", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1975.
42. IRONS, B. M., " A Frontal solution program for finite element analysis ", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 2, 5-32, 1970.
43. ZIENKIEWICZ, O. C., " The finite element method and the boundary solution procedures " (Boundary Integral Method), *Proc. World Conf. on Finite Elements*, Bournemouth, 1975.
44. VOGT, F., " Uber die Berechnung der Fundament Deformationen ", *Det Norske Videnskaps Akademi*, Oslo, 1925.
45. ZIENKIEWICZ, O. C., and BETTES, P., " Infinite elements in the study of finite — structures interaction problems ", *Second Int. Symp. on computing Methods in Applied Science and Engineering*, Versailles, France, 1975.
46. GARTLING, D. K. and BECKER, E. B., " Computationally efficient finite element analysis of viscous flow problems. " *Computational Methods in Non-Linear Mechanics* ", *Symp. of Texas Inst. for computational mechanics*. U. of Texas Press, 1974.
47. ZIENKIEWICZ, O. C. and NEWTON, R. E., " Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid ", *Int. Symp. Finite El. Tech. in Naval architecture*. Stuttgart, May 1969.
48. LYSMER, J. and KUHFMEYER, R. L., " Finite dynamic model for infinite media ", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 95 EM4, 859-77, 1969.
49. ANG, University of Illinois Report, 1970.
50. CHEN, H. S. and MEI, C. C., " Oscillations and Wave forces in an offshore harbour. Application of hybrid finite element method to water wave scattering ", *R. M. Parsons Laboratory*, ref. No. 190, M.I.T. Cambridge, Mass., 1974.
51. BORELLI, L. J., " Wave action on large offshore structures ", *Conf. on Offshore Structures*, p. 7-14, *Inst. Civ. Eng.*, Oct. 1974.
52. RANAWEFFA, M. P. and LECKIE, F. A., " Bound methods in limit analysis ". Ch. 9 in *Finite Element Techn. in Struct. Mech.*, ed. H. Tottenham, C. Brebbia, U. of Southampton Press, 1970.
53. ZIENKIEWICZ, O. C. and GODBOLE, P. N., " Flow of plastic and viscoplastic solids with special reference to extrusion and forming process ", *Int. J. Num. Eng. Meth.*, 8, 3-16, 1974.
54. CAMPBELL, J. S. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Gravity dam analysis: the effect of valley width ".

55. LEFEBRE, G., DUNCAN, J. M. and WILSON, E. L., " Three dimensional finite element analysis of dams ", *Proc. A.S.C.E.*, 99 SM7, 495-507, 1972.
56. EISENSTEIN, Z., KRISHNEYE and MORGENSTERN, N. R., " An analysis of cracking in earth dams ", *Symp. on application of finite element methods in Geotechnical Eng.*, Vicksburg, Mississippi, 1972.
57. CLOUGH, R. W. and WOODWARD, R. J., " Analysis of embankment stresses and deformations ", *Proc. A.S.C.E.*, 93 SM4, 529-49, 1967.
58. RICKETTS, R. E., *Ph.D. Thesis*, University College Swansea, 1975.
59. Symposium on Arch Dams. Institution of Civil Engineers, London, 1968.
60. LEVY, M., " Sur la légitimité de la règle dite de trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie ", *Comp. rend. Acad. Sci. v.*, 126, 1898.
61. STROHM, W. E. and JOHNSON, S. I., " The influences of construction step sequence and non-linear material behaviour on cracking of earth and rockfill dams ", *U.S. Army, Eng. Waterways Expt. Station, Paper S-71-10*, Vicksburg, Mississippi, 1971.
62. GOODMAN, L. E. and BROWN, C. B., " Dead load stresses and the instability of slopes " *Proc. A.S.C.E.*, 89 SM3, 103-134, 1962.
63. ZIENKIEWICZ, O. C. and HUMPHESON, C., " Viscoplasticity — a generalised method for description of soil behaviour ", *Int. report C/R/232/75*, University College Swansea, 1975.
64. NAYLOR, D. J., *Private communication*, University College Swansea, 1974.
65. STROHM, W. E. and JOHNSON, S. J., " The influences of construction step sequence and non-linear behaviour on cracking of earth and rock fill dams ", *U.S. Army Eng. Waterways Expt. Station Paper S-71-10*, Vicksburg, Miss, 1971.
66. de SILVEIRA, A. F. " As variações de temperatura nos barragens ", LNEC Lisbon, 1961.
67. ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPPAN, S. and KING, I. P., " Stress analysis of rocks as a no-tension material ". *Geotechnique*, 18, 56-66, 1968.
68. YAMADA, Y., YOSHIMURA, N. and SAKURAI, T., " Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elasto-plastic problem. by the finite element method ", *Int. J. Mech. Sci.*, 10, 343-54, 1968.
69. NAYAK, G. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Elasto-plastic stress analysis. Generalisation for various constitutive relations including strain softening ", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 5, 113-35, 1972.
70. ZIENKIEWICZ, O. C. and CORMEAU, I. C., " Visco-plasticity — plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 8, 821-45, 1974.
71. ROSCOE, K. M. and BURLAND, J. B., " On the generalised stress strain behaviour of wet clay *Engineering-plasticity*, Cambridge Univ. Press, 1968.
72. SCHOFIELD, A. N. and WROTH, C. P., " Critical state soil mechanics ", McGraw-Hill, London, 1968.
73. ZIENKIEWICZ, O. C. and NAYLOR, D. J., " The adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements ", *Stress strain behaviour of Soils*, Foulis, London, 1971.
74. di MAGGIO, F. L. and SANDLER, I. S., " Material model for granular soils ", *Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, 97EM3, 935-50, 1971.
75. KNOTT, J. F., " Fundamentals of fracture mechanics ", Butterworth, London, 1973.
76. RICKETTS, R. E. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Preformed cracks and their influence on behaviour of concrete dams ", *Conf. Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams*, Swansea, Sept. 1975.
- 76a. GOODMAN, R. E., TAYLOR, R. L., BREKKE, T. L., " A model for the mechanics of jointed rocks ", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94 SM3, 1968.
- 76b. ZIENKIEWICZ, O. C., BEST, B., DULLAGE, C., STAGG, K. G. " Analysis of non linear problems in rock mechanics ", *Proc. 2nd Congress Int. Soc. Rock Mech.*, Belgrade, 1970.
77. U.S. Army Corps of Engineers, " Gravity Dam Design ", *Engineering Manual EM 1110-2-2200*, September 1958.
78. U.S. Bureau of Reclamation, " Concrete Dams. Chapter 1, Arch Dams ", *Design Standards No. 2*, March 1965.
79. CLOUGH R.W., " Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response ", *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, U.S.-Japan Seminar, Tokyo, 1969.
80. CLOUGH, R. W. and BATHE, K. J., " Finite Element Analysis of Dynamic Response ", *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, 2nd U.S.-Japan Seminar, Berkeley, 1972.
81. CLOUGH, R. W. and PENZIEN, T., " Dynamics of Structures ". McGraw-Hill, 1975.
82. RICHTMYER, R. D., MORTON, K. W., " Difference Methods for initial value problems ", 2nd Ed. T. Wiley. N. York, 1967.

83. HINTON, E., ROCK, T., and ZIENKIEWICZ, O. C., " A note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Methods ", accepted for publication, *Int. J. Earthq. Eng. and Struct. Dyn.*
84. WESTERGAARD, H. M., " Water Pressure on Dams during Earthquakes ", *Transactions, ASCE*, Vol. 98, 1933.
- 84a. PRISCU, R., POPOVICI, A., ILIE, L., STEMATIU, D., " New aspects in the earthquake analysis of arch dams ", *Proc. Intern. Symp. on Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams*, Swansea, 1975.
85. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., " Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics ", *Int. J. For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, No. 2, 1973, 213-266.
86. CLOUGH, R. W. and MOJTAHEDI, S., " Earthquake Response Analysis Considering Non proportional Damping ", accepted for publication. *Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
87. NEWMARK, N. M., " A method of Computation for Structural Dynamics ", *Proc. ASCE*, Vol. 85, No. EM3, 1959.
88. NEWMARK, N. M. and ROSENBLUETH, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971, 480.
89. CLOUGH, R. W., and PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1975, 584.
90. VAISH A. K. and CHOPRA, A. K., " Earthquake Finite Element Analysis of a Structure-Foundation Systems ", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, A.S.C.E. Vol. 100, No. EM6, December 1974, 1101-1116.
91. ZIENKIEWICZ, O. C. and NEWTON, R. W., " Coupled Vibration of a Structure Submerged in a Compressible Fluid ", International Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, May 1969.
92. BACK, P. A. A., CASSELL, A. C., DUNGAR, R. and SEVERN, R. T., " The Seismic Study of a Double Curvature Dam ", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Vol. 43, 1969, 217-248.
93. LIAW, C.Y. and CHOPRA, A. K., " Earthquake Analysis of Axisymmetric Towers Partially Submerged in Water ", *Int. J. Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 3, No. 3, 1975, 233-248
94. KOTSUBO, S., " Dynamic Water Pressures on Dam due to Irregular Earthquakes ", *Memoirs, Faculty of Engineering*, Kyushu University, Fukoka, Japan, Vol. 18, No. 4. 1959.
95. CHOPRA, A. K., " Hydrodynamic Pressures on Dams during Earthquakes ", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, A.S.C.E., Vol. 93. No. EM6, Proc. Paper 5695, December 1967, 205-223.
96. BUSTAMANTE, J. I., ROSENBLUETH, E., HERRERA, I. and FLORES, A., " Presion Hidrodinamica en Presas y Depositos ", *Boletin Sociedad Mexicana de Ingenieria Sismica*, Vol. 1, No. 2, October 1963.
97. CHOPRA, A. K., " Earthquake Behavior of Reservoir-Dam Systems ", *Journal of the Engineering mech. div. ASCE*, vol. 94, N° EM 6, dec. 1968.
98. CHAKARBARTI, P. and CHOPRA, A. K., " Hydrodynamic Effects in Earthquake Response of Gravity Dams ", *Journal of the Structural Division*, A.S.C.E., Vol. 100, No. ST6, June 1974.
99. COOLEY, J. W. and TUKEY, J. W., " An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series ", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965, 297-301.
100. PERUMALSWAMI, P. R. and KAR, L., " Earthquake Behavior of Arch Dam-Reservoir Systems ", *Proceedings, Fifth World Conference on Earthquake Engineering*, Rome, June 1973.
- 100a. POPOVICI, A., " Contributions to the seismic calculus of arch dams ", Ph. D. Thesis, Bucharest, 1976 (in romanian).
101. FINN, W. D. L. and VAROGLU, E., " Dynamics of a Concrete Dam-Reservoir System on a Flexible Layer Foundation ", *Proceedings, McGill-EIC Conference on the Finite Element Method in Civil Engineering*, McGill University, Montreal, 1972.
102. CLOUGH, R. W., RAPHAEL, J. M. and MOJTAHEDI, S., " ADAP — A Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Arch Dams ", Earthquake Engineering Research Center Report No. EERC 73-14, University of California, Berkeley, June 1973.
103. CHAKRABARTI, P. and CHOPRA, A. K., " A computer Program for Earthquake Analysis of Gavity Dams Including Hydrodynamic Interaction ", Report No. EERC 73-7, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, May 1973.
104. VAISH, A. K. and CHOPRA, A. K., " Earthquake Analysis of Structure-Foundation Systems ", Report No. EERC 73-9, Earthquake Engineering Research Center. University of California, Berkeley, California, May 1973.
105. BALSARA, J. P. and NORMA, C. D., " Vibration Tests and Analysis of a Model Arch Dams ", *Int. J. Earthquake Eng. and Struct. Dyl.*, Vol. 4, No. 2, 1975

106. PAL, N., " Nonlinear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams ", *Report No. EERC 74-14*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, December 1974.
107. IDRIS, I. M. LYSMER, T., HWANG, R., SEED, H. B., " Quad-4 A Computer program for evaluating seismic response of soil structures by variable damping finite elements ", Earthquake Eng. Research Center, *Report EERC 73-11*, Univ. of Calif., Berkeley, 1973.
108. SEED, H. B., DUNCAN, J. M., and IDRIS, I. M., " Criteria and methods for static and dynamic analysis of earth dams ". *Proc. Symposium on Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams*, Swansea, 1975.
109. SEED, H. B., LEC, K. L., IDRIS, I. M., and MAKDISI, F. I., " The slides in the San Fernando Dams during the Earthquake of February 9, 1971 ", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E.*, Vol. 101, No. GT7, Proc. paper 11449, July 1975, 651.688.
110. NEWMARK, N. M., " Effects of Earthquakes on Dams and Embankments", *Geotechnique*, London, England, Vol, 15, No. 2, June, 1965.
111. SEED, H. B., LEE, K. L., and IDRIS, I. M., " Analysis of Sheffield dam Failure ", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E.*, Vol. 95, No. SM6, Proc. Paper 6906, Nov. 1969, pp. 1453-1490.
114. Code of practice for the structural use of concrete. CP110. Part. I. November 1972. British Standards Institution.

Imprimerie de Montlignon
61400 La Chapelle Montlignon
Dépôt légal : mars 1987
N° 13230
ISSN 0534-8293

Copyright © ICOLD - CIGB

Archives informatisées en ligne  *Computerized Archives on line*

*The General Secretary / Le Secrétaire Général :
André Bergeret - 2004*



**International Commission on Large Dams
Commission Internationale des Grands Barrages
151 Bd Haussmann -PARIS -75008**
<http://www.icold-cigb.net> ; <http://www.icold-cigb.org>